中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB001Y-B02

课程名称：线性代数I-B (期中试卷)

任课教师：李子明、陈绍示、张旭彤

注意事项：

1. 考试时间为120 分钟，考试方式闭卷；

2. 全部答案写在答题纸上；

3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (15分) 设置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 1 & 7 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}$.

(i) 把 σ 写成互不相交的循环之积.

(ii) 计算 σ 的阶.

(iii) 确定 σ 的奇偶性.

解. *(i)* $\sigma = (142)(37658)(9\underline{10})$.

(ii) $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{lcm}(3,5,2) = 30$.

(iii) $\epsilon_\sigma = -1$, 奇置换.

2. (10分) 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 如果 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U$, 则称 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 等价, 并记为 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$.

(i) 验证 $\sim_U$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的等价关系.

(ii) 证明: $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$ 当且仅当 $\mathbf{x} + U = \mathbf{y} + U$.

证明: *(i)* 对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0} \in U$. 故 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{x}$. 自反性成立.

设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$. 则

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U \Rightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in U.$$

故 $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{x}$. 对称性成立.

再设 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$ 和 $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{z}$. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z} \in U$. 故

$$\mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{z} \in U.$$

由此可知, $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{z}$. 传递性成立.

(ii) 设 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$. 则 $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in U$. 设 $\mathbf{v} \in \mathbf{x}+U$. 则存在 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $\mathbf{v}=\mathbf{x}+\mathbf{u}$. 故

$$\mathbf{v}=\mathbf{y}+(\mathbf{x}-\mathbf{y})+\mathbf{u}.$$

因为 $\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{u} \in U$, 所以 $\mathbf{v} \in \mathbf{y}+U$, 所以 $\mathbf{x}+U \subset \mathbf{y}+U$. 同理可知, $\mathbf{y}+U \subset \mathbf{x}+U$. 故 $\mathbf{x}+U=\mathbf{y}+U$.

设 $\mathbf{x}+U=\mathbf{y}+U$. 因为 $\mathbf{0} \in U$, 所以 $\mathbf{x} \in \mathbf{x}+U$. 故存在 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $\mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{u}$. 故 $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{u} \in U$. 由此得出, $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$.

另证: 设 $\mathbf{v} \sim_U \mathbf{x}$. 则 $\mathbf{v}-\mathbf{x} \in U$. 故 $\mathbf{v} \in \mathbf{x}+U$. 反之, 设 $\mathbf{w} \in \mathbf{x}+U$. 则 $\mathbf{w}-\mathbf{x} \in U$. 故 $\mathbf{w} \sim_U \mathbf{x}$. 综上所述, $\mathbf{x}+U$ 是 $\mathbf{x}$ 关于 $\sim_U$ 的等价类. 由此可知, $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$ 当且仅当 $\mathbf{x}+U=\mathbf{y}+U$.

3. (15分) 设齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_5=0 \\ 2x_1-2x_2+3x_3+x_4+2x_5=0 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$. 它的系数矩阵记为 A, 解空间记为 V.

(i) 计算 $\operatorname{rank}(A)$.

(ii) 计算 V 的维数和一组基.

(iii) 判断以 $\begin{pmatrix} & \mid 1 \\ A & \mid 1 \\ & \mid 1 \end{pmatrix}$ 为增广矩阵的线性方程组是否相容.

解: *(i)* 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

通过初等行变换得

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

故 $\operatorname{rank}(A)=2$.

(ii) 根据对偶定理, $\dim(V)=5-2=3$. 解空间 V 的一组基是:

$$(1,1,0,0,0)^t, \quad (0,0,1,-1,-1)^t, \quad (-1,0,1,-1,0)^t.$$

(iii) 设 $\mathbf{b}=(1,1,1)^t$. 对 $B=(A|\mathbf{b})$ 做类似的行变换得

$$B\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1&1\\0&0&1&1&0&-1\\1&-1&2&1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1&1\\0&0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&0&1&1\\0&0&1&1&0&-1\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank}(B)=3\neq\operatorname{rank}(A)$, 所以该方程组不相容.

4. (15分) 设 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的标准基, $\boldsymbol{\epsilon}_1$, $\boldsymbol{\epsilon}_2$, $\boldsymbol{\epsilon}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基. 线性映射 $\phi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ 由

$$\phi(\mathbf{e}_1)=2\boldsymbol{\epsilon}_1-3\boldsymbol{\epsilon}_3,\quad \phi(\mathbf{e}_2)=\boldsymbol{\epsilon}_2-\boldsymbol{\epsilon}_3,$$

$$\phi(\mathbf{e}_3)=4\boldsymbol{\epsilon}_1-6\boldsymbol{\epsilon}_3,\quad \phi(\mathbf{e}_4)=-2\boldsymbol{\epsilon}_1+2\boldsymbol{\epsilon}_2+3\boldsymbol{\epsilon}_3$$

确定.

(i) 写出 ϕ 在 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$; $\boldsymbol{\epsilon}_1$, $\boldsymbol{\epsilon}_2$, $\boldsymbol{\epsilon}_3$ 下的矩阵.

(ii) 计算 $\dim(\ker(\phi))$ 和 $\dim(\operatorname{im}(\phi))$.

(iii) 计算 $\phi(\mathbf{u})$, 其中 $\mathbf{u}=(1,1,-1,-1)^t$.

解: (i) 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&0&4&-2\\0&1&0&2\\-3&-1&-6&3\end{pmatrix}.$$

(ii) 由初等行变换得

$$A\to\begin{pmatrix}2&0&4&-2\\0&1&0&2\\0&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank}(A)=3$, 所以 $\dim(\operatorname{im}(\phi))=3$. 根据对偶定理 $\dim(\ker(\phi))=4-3=1$.

(iii) $\phi(\mathbf{u})=A\mathbf{u}=(0,-1,-1)^t$.

5. (15 分) 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ 是三阶实矩阵.

(i) 计算 A^2 和 A^3.

(ii) 证明: 对任意非负整数 m, $A^{2m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $A^{2m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m+1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) 对任意正整数 k 和实数 λ, 计算 $\operatorname{rank}(A^k + \lambda E)$, 其中 E 是三阶单位方阵.

解 *(i)* 直接计算得

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) 对 m 归纳. 当 $m = 1$ 时, 根据 *(i)* 的计算结果可知结论成立. 设 $m > 1$ 且 $m-1$ 时结论成立. 我们计算得

$$A^{2m} = A^{2m-1}A = A^{2m+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 0 & 1 \\ m-1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由此得出

$$A^{2m+1} = A^{2m}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m+1 & 0 & 1 \\ m & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) 由 *(ii)* 可知, 当 $k = 2m$ 时,

$$A^k + \lambda E = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 & 0 \\ m & 1+\lambda & 0 \\ m & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix}.$$

故当 $\lambda \neq -1$ 时 $\operatorname{rank}(A^k + \lambda E) = 3$. 当 $\lambda = -1$ 时, $\operatorname{rank}(A) = 1$.

当 $k = 2m+1$ 时,

$$A^k \lambda + E = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 0 & 0 \\ m+1 & \lambda & 1 \\ m & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

故当 $\lambda \neq \pm 1$ 时 $\operatorname{rank}(A^k + \lambda E) = 3$. 当 $\lambda = \pm 1$ 时, $\operatorname{rank}(A) = 2$.

6. (10分) 设 m, n 是正整数.

(i) 证明: 存在整数 u, v 满足 $0 \le u < n$ 和 $um + vn = \gcd(m, n)$.

(ii) 满足 (i) 中结论的整数 u 和 v 是否唯一? 如果唯一, 请证明; 否则, 举出反例.

证明: *(i)* 根据 *Bezout* 关系可知, 存在 $a, b \in \mathbb{Z}$ 使得

$$am + bn = \gcd(m, n).$$

由整数带余除法得 $a = qn + r$, 其中 $q \in \mathbb{Z}$ 和 $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. 故

$$\gcd(m, n) = rm + (qm + b)n.$$

令 $u = r$ 和 $v = qm + b$ 得到结论.

(ii) 不成立. 例如 $8 - 6 = 4 \times 8 - 5 \times 6 = 2$.

7. (10分) 设 ϕ 和 ψ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的线性映射. 证明:

(i) 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们有 $\mathrm{im}(\alpha\phi + \beta\psi) \subset \mathrm{im}(\phi) + \mathrm{im}(\psi)$ 成立;

(ii) 如果 $\mathrm{im}(\phi) + \mathrm{im}(\psi) = \ker(\phi) + \ker(\psi) = \mathbb{R}^n$, 则

$$\mathrm{im}(\phi) \cap \mathrm{im}(\psi) = \ker(\phi) \cap \ker(\psi) = \{\mathbf{0}\}.$$

证明: *(i)* 设 $\mathbf{y} \in \mathrm{im}(\alpha\phi + \beta\psi)$, 则存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得

$$\mathbf{y} = (\alpha\phi + \beta\psi)(\mathbf{x}) = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\psi(\mathbf{x}).$$

因为 $\phi(\mathbf{x}), \psi(\mathbf{x}) \in \mathrm{im}(\phi) + \mathrm{im}(\psi)$, 所以 $\alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\psi(\mathbf{x}) \in \mathrm{im}(\phi) + \mathrm{im}(\psi)$. 故

$$\mathbf{y} \in \mathrm{im}(\phi) + \mathrm{im}(\psi),$$

即 $\mathrm{im}(\alpha\phi + \beta\psi) \subset \mathrm{im}(\phi) + \mathrm{im}(\psi)$.

(ii) 由条件和可知: $\dim(\mathrm{im}(\phi) + \mathrm{im}(\psi)) = n$. 根据维数公式，我们有

$$\dim(\mathrm{im}(\phi) \cap \mathrm{im}(\psi)) = \dim(\mathrm{im}(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\psi)) - n.$$

类似地, 我们有

$$\dim(\ker(\phi) \cap \ker(\psi)) = \dim(\ker(\phi)) + \dim(\ker(\psi)) - n.$$

把上述两式相加得

$$\begin{aligned}
&\dim(\mathrm{im}(\phi)\cap\mathrm{im}(\psi))+\dim(\ker(\phi)\cap\ker(\psi))\\
=&\dim(\mathrm{im}(\phi))+\dim(\mathrm{im}(\psi))+\dim(\ker(\phi))+\dim(\ker(\psi))-2n\\
=&[\,\dim(\ker(\phi))+\dim(\mathrm{im}(\phi))\,]+[\,\dim(\ker(\psi))+\dim(\mathrm{im}(\psi))\,]-2n\\
=&n+n-2n \quad \text{(对偶定理)}\\
=&0
\end{aligned}$$

因为维数是非负的, 所以 $\dim(\mathrm{im}(\phi)\cap\mathrm{im}(\psi))=\dim(\ker(\phi)\cap\ker(\psi))=0$. 故

$$\mathrm{im}(\phi)\cap\mathrm{im}(\psi)=\ker(\phi)\cap\ker(\psi)=\{\mathbf{0}\}.$$

8. (10分) 设 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^s$ 和 $\psi:\mathbb{R}^s\to\mathbb{R}^m$ 是线性映射. 证明:

(i) 如果 $\psi\circ\phi$ 是满射, 则 $\dim(\mathrm{im}(\phi))\geq m$;

(ii) 如果 $\psi\circ\phi$ 是单射, 则 $\dim(\ker(\psi))\leq s-n$.

证明: *(i)* 因为 $\mathrm{im}(\psi\circ\phi)=\psi(\mathrm{im}(\phi))$, 所以 $\psi(\mathrm{im}(\phi))=\mathbb{R}^m$. 故 $\dim\psi(\mathrm{im}(\phi))=m$. 我们有 $\dim(\mathrm{im}(\phi))\geq m$ (子空间在线性映射下的像的维数不会比原子空间维数高).

(ii) 由对偶定理可知, $\dim(\mathrm{im}(\psi\circ\phi))=n$. 因为 $\mathrm{im}(\phi)\subset\mathbb{R}^s$, 所以

$$\mathrm{im}(\psi\circ\phi)\subset\mathrm{im}(\psi).$$

故 $n\leq\dim(\mathrm{im}(\psi))$. 再根据对偶定理

$$s=\dim(\ker(\psi))+\dim(\mathrm{im}(\psi))\geq\dim(\ker(\psi))+n\ \Rightarrow\ \dim(\ker(\psi))\leq s-n.$$

另证: 因为 $\psi\circ\phi$ 是单射, 所以 ϕ 是单射. 故 $\dim(\mathrm{im}(\phi))=n$ (对偶定理). 假设 $\dim(\ker(\psi))>s-n$. 则由维数公式可知,

$$\begin{aligned}
\dim(\mathrm{im}(\phi)\cap\ker(\psi))&=\dim(\mathrm{im}(\phi))+\dim(\ker(\psi))-\dim(\mathrm{im}(\phi)+\ker(\psi))\\
&>n+(s-n)-s=0.
\end{aligned}$$

故存在非零向量 $\mathbf{v}\in(\mathrm{im}(\phi)\cap\ker(\psi))$. 设 $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{v}=\phi(\mathbf{u})$. 则

$$\psi\circ\phi(\mathbf{u})=\psi(\phi(\mathbf{u}))=\psi(\mathbf{v})=\mathbf{0}_m.$$

因为 $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}_n$, 所以 $\psi\circ\phi$ 不是单射, 矛盾.

注. 利用矩阵表示和秩不等式也可证明此题.