中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB001Y-B02

课程名称：线性代数I-B (期末A卷)

任课教师：李子明、陈绍示、张旭彤

注意事项：

1. 考试时间为**180** 分钟，考试方式闭卷；

2. 全部答案写在答题纸上；

3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

蓝色部分取自同学们的卷子

1. (10分) 设有限域 $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, 线性映射 $\phi : \mathbb{Z}_3^4 \to \mathbb{Z}_3^3$ 由

$$\phi(\mathbf{e}_1) = \epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3,\ \phi(\mathbf{e}_2) = \bar{2}\epsilon_1,\ \phi(\mathbf{e}_3) = \epsilon_1 + \bar{2}\epsilon_2,\ \phi(\mathbf{e}_4) = \epsilon_1 + \bar{2}\epsilon_3$$

确定, 其中 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{Z}_3^4$ 的标准基, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 是 $\mathbb{Z}_3^3$ 的标准基. 计算线性映射 ϕ 在上述标准基下的矩阵, $\dim(\ker(\phi))$ 和 $\phi(\mathbf{v})$, 其中 $\mathbf{v} = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{2})^t$.

解. 线性映射 ϕ 的矩阵表示是

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ -\bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ -\bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}.$$

由初等行变换得 $A \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}$. 故 $\operatorname{rank}(A) = 3$. 由对偶定理 $\dim(\ker(\phi)) = 4 - 3 = 1$.

直接计算得 $\phi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ -\bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ -\bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$.

2. (10分) 设 n 阶实矩阵 $A_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

计算 $\det(A_2)$, $\det(A_3)$ 和 $\det(A_n)$, 其中 $n \geq 4$.

解. $\det(A_2) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -1.$

$\det(A_3) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$

设 $n > 3$. 按第一列展开得 $\det(A_n) = -\det(A_{n-2})$.

当 n 为偶数时 $\det(A_n) = (-1)^{n/2}$.

当 n 是奇数时 $\det(A_n) = 0$.

3. (10分) 设域 $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{i} \mid i = 0, 1, \ldots, 4\}$, $f(x) = \bar{2}x^2 + \bar{4}$, 和

$$A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

计算 $f(A)$. 确定 $f(A)$ 是否可逆. 当 $f(A)$ 可逆时, 计算 $f(A)^{-1}$.

解. $f(A) = \bar{2}A^2 + \bar{4}E = \bar{2} \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}^2 + \bar{4}E = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$

在计算 $f(A)$ 的"逆"的过程中可以确定 $f(A)$ 是否满秩. 故直接计算:

$$(f(A)|E) = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & | & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} & | & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & | & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & | & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} & | & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & | & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & | & \bar{3} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} & | & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & | & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & | & \bar{3} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & | & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & | & \bar{4} & \bar{0} & \bar{3} \end{pmatrix}.$$

故
$$f(A)^{-1}=\begin{pmatrix}\bar{3}&\bar{0}&\bar{4}\\ \bar{0}&\bar{2}&\bar{0}\\ \bar{4}&\bar{0}&\bar{3}\end{pmatrix}.$$

4. (10分) 设 $(G,\cdot,e)$ 是群, T_G 是从 G 到 G 的所有双射关于映射复合 $\circ$ 构成的群. 证明: 存在从 G 到 T_G 的单同态.

证明. 设
$$\begin{array}{rccc}\phi: & G & \to & T_G\\ & x & \mapsto & L_x\end{array},$$
其中 L_x 是关于 x 的左平移. 已知 $L_g\in T_G$.

对任意的 $x,y\in G$, $\phi(xy)=L_{xy}$. 而对任意 $g\in G$,
$$L_x\circ L_y(g)=L_x(yg)=x(yg)=(xy)g=L_{xy}(g).$$
故 $L_x\circ L_y=L_{xy}$. 由此可知, $\phi(xy)=L_x\circ L_y=\phi(x)\circ\phi(y)$. 故 ϕ 是群同态. 设 $\phi(x)=\phi(y)$. 则 $L_x=L_y$. 故 $L_x(e)=L_y(e)$. 由此可知 $x=y$. 进而 ϕ 是单同态.

5. (10分) 设 $(R,+,0_R,\cdot,1_R)$ 和 $(S,+,0_S,\cdot,1_S)$ 是两个环, $\phi:R\to S$ 是环同构. 证明: $\phi^{-1}:S\to R$ 也是环同构.

证明. 只需验证 $\phi^{-1}:S\to R$ 是环同态.

设 $x,y\in S$. 令 $a=\phi^{-1}(x)$ 和 $b=\phi^{-1}(y)$. 则 $x=\phi(a)$ 且 $y=\phi(b)$. 因为 $\phi(a+b)=\phi(a)+\phi(b)=x+y$, 所以 $\phi^{-1}(x+y)=a+b=\phi^{-1}(x)+\phi^{-1}(y)$. 类似, 由 $\phi(ab)=\phi(a)\phi(b)=xy$ 可知, $\phi^{-1}(xy)=ab=\phi^{-1}(x)\phi^{-1}(y)$. 最后, 因为 $\phi(1_R)=1_S$, 所以 $\phi^{-1}(1_S)=1_R$.

6. (10分) 设 $(G,\cdot,e)$ 是群. 如果 G 的子群不等于 G, 则称该子群为 G 的真子群.

   (i) 证明: G 不可能是两个真子群的并.

   (ii) 证明: 当 $\mathrm{card}(G)=4$ 且 G 不是循环群时, G 可以写成三个真子群的并.

证明. *(i)* 假设 G_1 和 G_2 是 G 的两个真子群且 $G=G_1\cup G_2$. 则 G_1 和 G_2 彼此互不包含. 故存在 $g_1\in G_1\setminus G_2$ 和 $g_2\in G_2\setminus G_1$.

因为 $g_1g_2\in G$, 所以 $g_1g_2\in G_1$ 或 $g_1g_2\in G_2$. 如果 $g_1g_2\in G_1$, 则 $g_2=g_1^{-1}(g_1g_2)\in G_1$, 矛盾. 同理, $g_1g_2\in G_2$ 蕴含 $g_1=g_1g_2g_2^{-1}\in G_2$, 矛盾. 故 G 不可能是两个真子群的并.

(ii) 因为 $\mathrm{card}(G)=4$ 且 G 不是循环群, 所以 $G=\{e,a,b,c\}$, 其中

$$\mathrm{ord}(a)=\mathrm{ord}(b)=\mathrm{ord}(c)=2.$$

这是因为 G 中的非单位元的阶只可能是 2 和 4, 但 G 不是循环群意味着阶为 4 阶元素不存在. 于是, $\langle a\rangle=\{e,a\},\langle b\rangle=\{e,b\}$, 和 $\langle c\rangle=\{e,b\}$. 我们有 $G=\langle a\rangle\cup\langle b\rangle\cup\langle c\rangle$.

另证: 设 $G=\{e,a,b,c\}$. 因为 G 不是循环群, 所以 $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ 和 $\langle c\rangle$ 都是真子群. 又因为 $e\in\langle a\rangle$, 所以 $G=\langle a\rangle\cup\langle b\rangle\cup\langle c\rangle$.

7. (10分) 设 $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}A & B\\ O & C\end{pmatrix}\mid A\in \mathrm{M}_m(\mathbb{R}),B\in\mathbb{R}^{m\times n},C\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})\right\}$, 其中 O 代表 $n\times m$ 的零矩阵.

(i) 证明: $\mathcal{S}$ 是矩阵环 $\mathrm{M}_{m+n}(\mathbb{R})$ 的子环.

(ii) 设 M 是 $\mathcal{S}$ 中的非零矩阵. 证明: 如果 M 不满秩, 则它既是 $\mathcal{S}$ 中的左零因子又是右零因子.

证明. *(i)* 设 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ O & C\end{pmatrix}$ 和 $M'=\begin{pmatrix}A' & B'\\ O & C'\end{pmatrix}$ 是 $\mathcal{S}$ 中的两个元素. 则

$$M-N=\begin{pmatrix}A-A' & B-B'\\ O & C-C'\end{pmatrix}\in\mathcal{S}\quad 和\quad MN=\begin{pmatrix}AA' & AB'+BC'\\ O & CC'\end{pmatrix}\in\mathcal{S}.$$

其中 O 代表 $F^{n\times m}$ 中的零矩阵. 而 $F^{m\times n}$ 中的单位矩阵显然在 $\mathcal{S}$ 中. 故 $\mathcal{S}$ 是子环.

(ii) 设 $\mathrm{rank}(M)<m+n$. 则存在非零向量 $\mathbf{v}\in F^{m+n}$ 使得 $M\mathbf{v}=\mathbf{0}$. 设

$$N=(\underbrace{\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0}}_{m+n-1},\mathbf{v}).$$

则 $N\in\mathcal{S}$, 非零且 MN 是 F^{m+n} 中的零矩阵. 故 M 是左零因子.

注意到 $\mathrm{rank}(M^t)<m+n$. 故存在非零向量 $\mathbf{w}\in F^{m+n}$ 使得 $M^t\mathbf{w}=\mathbf{0}$. 于是 $\mathbf{w}^tM=\mathbf{0}^t$. 设 $P\in F^{m+n}$, 它的第一行是 $\mathbf{w}^t$, 而其它行都是 $\mathbf{0}^t$. 则 $P\in\mathcal{S}$ 且 PM 是 F^{m+n} 中的零矩阵. 故 M 是右零因子.

(ii) 的另证之一.

设 $M=\begin{pmatrix}A & B\\ O & C\end{pmatrix}$ 满足 $0<\mathrm{rank}(M)<m+n$. 则 $\det(M)=0$. 故 $\det(A)\det(C)=0$.

情形 1. 如果 $\det(A)=0$, 则存在 $A', A'' \in \mathrm{M}_m(F)$ 都非零且

$$A'A = AA'' = O. \tag{1}$$

则

$$M\begin{pmatrix} A'' & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A'' & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA'' & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

故 M 是左零因子.

情形 2. 如果 $\det(A)\neq 0$, 则 $\det(C)=0$. 存在 $C', C'' \in \mathrm{M}_n(F)$ 都非零且

$$C'C = CC'' = O. \tag{2}$$

则

$$M\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & O \\ O & C'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & -A^{-1}BC'' \\ O & C'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

故 M 是左零因子.

情形 3. 如果 $\det(C)=0$, 则令 C' 由 (2) 给出. 我们有

$$\begin{pmatrix} O & O \\ O & C' \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} O & O \\ O & C' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & C'C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

故 M 是右零因子.

情形 4. 如果 $\det(C)\neq 0$, 则 $\det(A)=0$. 令 A' 由 (1) 给出. 则

$$\begin{pmatrix} A' & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -BC^{-1} \\ O & E \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} A' & -A'BC^{-1} \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

故 M 是右零因子.

(ii) 的另证之二.

设 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ 满足 $0 < \mathrm{rank}(M) < m+n$. 再设 k 是最小的正整数使得存在 $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in F$ 满足

$$M^k + a_{k-1}M^{k-1} + \cdots + a_1 M + a_0 E = O.$$

因为 M 不可逆, 所以 $a_0 = 0$. 故上式可写为

$$M\underbrace{\left(M^{k-1} + a_{k-1}M^{k-2} + \cdots + a_1 E\right)}_{N} = O.$$

由 k 的极小性可知 $N \neq 0$. 因为 $\mathcal{S}$ 是环且 $M \in \mathcal{S}$, 所以 $N \in \mathcal{S}$. 于是, M 是左零因子. 又因为 $MN = NM$, 所以 $NM = O$. 故 M 也是右零因子.

注: 这个证明意味着矩阵环中的子环的左右零因子就是该子环中的不可逆且非零的矩阵.

8. (10分) 设 F 是域, $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 满足 $A^3 = E$, 其中 E 是 $\mathrm{M}_n(F)$ 中的单位矩阵. 证明:

   (i) $\mathrm{rank}(A - E) + \mathrm{rank}(A^2 + A + E) \leq n$.

   (ii) 当 F 的特征等于 3 时, $\mathrm{rank}(A - E) \leq 2n/3$.

证明. 设 $f(x) = x^3 - 1 \in F[x]$. 则 $f(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ 且 $f(A) = O$.

(i) 因为 $(A-E)(A^2+A+E) = O$, 所以由矩阵秩的 Sylvester 不等式得到

$$0 \geq \mathrm{rank}(A - E) + \mathrm{rank}(A^2 + A + E) - n.$$

故 $\mathrm{rank}(A - E) + \mathrm{rank}(A^2 + A + E) \leq n$.

(ii). 当 $\mathrm{char}(F) = 3$. 则由大学一年级新生之梦可知, $f(x) = (x-1)^3$. 故 $(A-E)^3 = O$. 两次利用关于矩阵秩的 Sylvester 不等式得到

$$0 \geq 3\,\mathrm{rank}(A - E) - 2n.$$

故 $\mathrm{rank}(A - E) \leq 2n/3$.

9. (10分) 设 F 是域, $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 B 可逆. 证明:

   (i) $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$ 且当 A 可逆时, $(B^{-1}AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}B$;

   (ii) $B^{-1}AB$ 的伴随矩阵等于 $B^{-1}A^{\vee}B$, 其中 $A^{\vee}$ 代表 A 的伴随矩阵.

证明. (i) 根据行列式乘积定理,

$$\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})\det(A)\det(B) = \det(B^{-1}B)\det(A) = \det(A).$$

由穿衣脱衣规则可知 $(B^{-1}AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\left(B^{-1}\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}B$.

(ii) 先设 A 可逆. 则 $A^\vee = \det(A)A^{-1}$. 由 *(i)* 可知

$$\begin{aligned} B^{-1}A^{-1}B &= \frac{1}{\det(A)}B^{-1}A^\vee B = (B^{-1}AB)^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(B^{-1}AB)}(B^{-1}AB)^\vee = \frac{1}{\det(A)}(B^{-1}AB)^\vee. \end{aligned}$$

故 $B^{-1}A^\vee B = (B^{-1}AB)^\vee$.

设 A 不可逆. 令 t 是 F 上的未定元, $M = tE + A$. 则 M 是 $F(t)$ 上的可逆矩阵. 由上述结果可知 $B^{-1}M^\vee B = (B^{-1}MB)^\vee$. 注意到上面矩阵中的每个元素都是 t 的多项式. 故 $(B^{-1}M^\vee B)|_{t=0} = (B^{-1}MB)^\vee|_{t=0}$. 又因为赋值是环同态, 所以 $(B^{-1}M^\vee B)|_{t=0} = (B^{-1}M|_{t=0}B)^\vee \Rightarrow B^{-1}A^\vee B = (B^{-1}AB)^\vee$.

(ii) 的另解. 由上课的例子可知

$$\left(B^{-1}AB\right)^\vee = B^\vee A^\vee (B^{-1})^\vee.$$

因为 B 可逆, 所以

$$B^\vee = \det(B)B^{-1} \quad 和 \quad (B^{-1})^\vee = \det(B^{-1})B.$$

把这两个式子代入第一个式子得

$$\left(B^{-1}AB\right)^\vee = \det(B)B^{-1}A^\vee \det(B^{-1})B = B^{-1}A^\vee B.$$

10. (10分) 设 F 是域, 矩阵 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 其中 $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(F)$. 再设 M 和 A 都可逆.

 (i) 证明: $\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.

 (ii) 令 $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$, 其中 $A', B', C', D' \in \mathrm{M}_n(F)$. 证明: D' 可逆.

证明. *(i)* 设 $P = \begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}$, 其中 E 是 n 阶方阵. 则

$$PM = \begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}. \tag{3}$$

两边取行列式得

$$\det(PM) = \det(P)\det(M) = \det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

(ii) 设 $Q=\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}$. 由 (3) 可知

$$PMQ=\begin{pmatrix} A & B \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}. \tag{4}$$

令 $L=D-CA^{-1}B$. 由 *(i)* 可知 L 可逆. 上式蕴含

$$M^{-1}=Q\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & L^{-1} \end{pmatrix}P=\begin{pmatrix} A & -A^{-1}BA \\ O & L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & * \\ * & L \end{pmatrix}.$$

故 $D'=L$, 其中 $*$ 代表某个 n 阶方阵. 进而, D' 可逆.

(ii) 的另解之一.

$$MM^{-1}=E=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}\Rightarrow AB'+BD'=O \text{ 和 } CB'+DD'=E.$$

因为 A 可逆, 所以 $B'=-A^{-1}BD'$. 故

$$(-CA^{-1}B+D)D'=E.$$

由此得出 D' 可逆.

(ii) 的另解之二. 设 $\mathbf{x}\in F^n$ 满足 $D'\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 只要证明 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 即可.

$$M^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B'\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

故

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} B'\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B'\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB'\mathbf{x} \\ * \end{pmatrix},$$

其中 $*$ 代表某个 F^n 中的向量. 于是, $AB'\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 因为 A 可逆, 所以 $B'\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 由此得出:

$$M^{-1}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\Rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}.$$