

第二章 线性算子

例 1.15 计算例 1.6 中 ϕ 的秩. 设矩阵 B 由例 1.6 给出. 则 $\text{rank}(\phi) = \text{rank}(B) = k\text{rank}(A)$.

例 1.16 设 $\phi : F^{m \times n} \longrightarrow F^{n \times m}$ 由公式 $\phi(X) = X^t$ 给出. 求 $\text{rank}(\phi)$.

解. 因为 ϕ 是单射, 所以 $\dim(\ker(\phi)) = 0$. 于是 $\text{rank}(\phi) = mn$.

推论 1.17 设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$. 则

(i) ϕ 是单射当且仅当 $\text{rank}(\phi) = \dim(V)$;

(ii) ϕ 是满射当且仅当 $\text{rank}(\phi) = \dim(W)$.

(iii) 如果 ϕ 是双射, 则 $\dim(V) = \dim(W)$.

证明. (i) ϕ 单当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_V\}$ (第一章第一讲命题 2.3) 当且仅当 $\text{rank}(\phi) = \dim(V)$ (上述注释).

(ii) ϕ 满当且仅当 $\dim(\text{im}(\phi)) = \dim(W)$ 当且仅当 $\text{rank}(\phi) = \dim(W)$ (推论 1.13).

(iii) 由 (i) 和 (ii) 可知,

$$\dim(V) = \text{rank}(\phi) \quad \text{且} \quad \dim(W) = \text{rank}(\phi). \quad \square$$

推论 1.18 设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ 且 $\dim(V) = \dim(W)$. 则以下断言等价

(i) ϕ 是单射;

(ii) ϕ 是满射;

(iii) ϕ 是双射.

证明. 设 $n = \dim(V)$, $r = \text{rank}(\phi)$.

(i) \implies (ii). 由上述推论 (i), $r = n$. 于是 $r = \dim(W)$. 从而, ϕ 是满射(上述推论 (ii)).

(ii) \implies (iii). 由上述推论 (ii), $r = n$. 于是 $r = \dim(V)$. 从而, ϕ 是单射(上述推论 (i)), 即 ϕ 是双射.

(iii) \implies (i). 显然. \square

推论 1.19 设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$, A 是 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ 下的矩阵. 则

(i) ϕ 是单射当且仅当 A 列满秩, 即 $\text{rank}(A) = n$;

(ii) ϕ 是满射当且仅当 A 行满秩, 即 $\text{rank}(A) = m$.

(iii) ϕ 是双射, 则 A 是可逆方阵.

证明. 注意到 $A \in F^{m \times n}$.

(i) ϕ 单当且仅当 $\text{rank}(\phi) = n$, 即 $\text{rank}(A) = n$. (推论 1.17 (i))

(ii) ϕ 满当且仅当 $\text{rank}(\phi) = m$, 即 $\text{rank}(A) = m$. (推论 1.17 (ii))

(iii) 由 (i) 和 (ii) 直接得出. \square

例 1.20 设 $A \in F^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r > 0$. 则存在列满秩矩阵 $L \in F^{m \times r}$ 和行满秩矩阵 $R \in F^{r \times n}$ 使得 $A = LR$.

证明. 设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ 在 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ 下的矩阵等于 A . 则 $\text{rank}(\phi) = r$. 于是 $\ker(\phi)$ 的维数是 $n - r$ (对偶定理). 从而 $V/\ker(\phi)$ 的维数等于 r . (见第一章第二讲引理 4.14.) 由线性映射基本定理 I 可知, $\phi = \bar{\phi} \circ \pi$, 其中 $\pi: V \rightarrow V/\ker(\phi)$ 是线性满射, $\bar{\phi}: V/\ker(\phi) \rightarrow W$ 是线性单射. 设 $\delta_1, \dots, \delta_r$ 是 $V/\ker(\phi)$ 的一组基, R 是 π 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \delta_1, \dots, \delta_r$ 下的矩阵, L 是 $\bar{\phi}$ 在 $\delta_1, \dots, \delta_r; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ 下的矩阵. 则 $A = LR$ (线性映射复合与矩阵乘法的关系) 且 L 列满秩, R 行满秩. \square

上述结果曾在上学期用矩阵打洞技术证明(见上学期第二章第六讲例 10.7).

1.3 线性同构

定理 1.21 映射:

$$\begin{aligned} \rho: \text{Hom}(V, W) &\longrightarrow F^{m \times n} \\ \phi &\longmapsto A_\phi, \end{aligned}$$

是线性同构, 其中 A_ϕ 是 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ 下的矩阵.

证明: 设 $\phi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$. 则

$$(\phi(\mathbf{e}_1), \dots, \phi(\mathbf{e}_n)) = (\epsilon_1 \dots \epsilon_m) A_\phi$$

和

$$(\psi(\mathbf{e}_1), \dots, \psi(\mathbf{e}_n)) = (\epsilon_1 \dots \epsilon_m) A_\psi.$$

于是,

$$((\phi + \psi)(\mathbf{e}_1), \dots, (\phi + \psi)(\mathbf{e}_n)) = (\epsilon_1 \dots \epsilon_m) (A_\phi + A_\psi).$$

由此可知, $A_{\phi+\psi} = A_\phi + A_\psi$. 换言之, $\rho(\phi+\psi) = \rho(\phi) + \rho(\psi)$.

再设 $\alpha \in F$. 则

$$(\alpha\phi(\mathbf{e}_1), \dots, \alpha\phi(\mathbf{e}_n)) = (\epsilon_1 \dots \epsilon_m) (\alpha A_\phi).$$

故 $\alpha A_\phi = A_{\alpha\phi}$. 换言之, $\rho(\alpha\phi) = \alpha\rho(\phi)$.

我们得到 ρ 是线性映射.

设 $A \in F^{m \times n}$. 设 ϕ_A 是由 $\phi_A(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) \vec{A}^{(j)}$, $j = 1, \dots, n$, 确定的线性映射. 令

$$\begin{aligned} \theta : F^{m \times n} &\longrightarrow \text{Hom}(V, W) \\ A &\longmapsto \phi_A. \end{aligned}$$

由 ϕ_A 的定义可知, 它在给定基底下的矩阵是 A .

注意到, $\rho \circ \theta(A) = \rho(\phi_A) = A$ 和 $\theta \circ \rho(\phi) = \theta(A_\phi) = \phi$ (θ 的定义). 故 $\theta = \rho^{-1}$. \square

1.4 对偶映射

设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$. 则

$$\begin{aligned}\phi^* : W^* &\longrightarrow V^* \\ f &\longmapsto f \circ \phi\end{aligned}$$

是从 W^* 到 V^* 的映射.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ & \searrow f \circ \phi & \downarrow f \\ & & F \end{array}$$

下面我们来验证 $\phi^* \in \text{Hom}(W^*, V^*)$. 设 $\alpha, \beta \in F$, $f, g \in W^*$. 根据上学期第二章第四讲命题 6.10, 我们有

$$\phi^*(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g) \circ \phi = \alpha f \circ \phi + \beta g \circ \phi = \alpha \phi^*(f) + \beta \phi^*(g).$$

验证完毕. 我们称 ϕ^* 是 ϕ 的对偶映射.

命题 1.22 设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ 在基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ 下的矩阵为 $A = (a_{i,j})_{m \times n}$. 则对偶映射 ϕ^* 在对偶基 $\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_m^*$ 和 $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ 下的矩阵是 A^t .

证明. 我们先计算 $\phi^*(\epsilon_i^*)$ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵, $i = 1, 2, \dots, m$. 对任意 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\phi^*(\epsilon_i^*)(\mathbf{e}_j) = \epsilon_i^*(\phi(\mathbf{e}_j)) = \epsilon_i^*(a_{1,j}\epsilon_1 + \dots + a_{m,j}\epsilon_m) = a_{i,j}.$$

则对于 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$,

$$\begin{aligned}\phi^*(\epsilon_i^*)(\mathbf{x}) &= a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n \\ &= a_{i,1}\mathbf{e}_1^*(\mathbf{x}) + \cdots + a_{i,n}\mathbf{e}_n^*(\mathbf{x}) \\ &= (a_{i,1}\mathbf{e}_1^* + \cdots + a_{i,n}\mathbf{e}_n^*)(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

于是,

$$\phi^*(\epsilon_i^*) = a_{i,1}\mathbf{e}_1^* + \cdots + a_{i,n}\mathbf{e}_n^* = (\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*) \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*) \vec{A}^t{}^{(i)}.$$

由此得出 A^t 是 ϕ^* 在 $\epsilon_1^*, \dots, \epsilon_m^*$ 和 $\mathbf{e}_1^*, \dots, \mathbf{e}_n^*$ 下的矩阵. \square

该命题的一个直接推论是 ϕ 和 ϕ^* 的秩相等.

2 线性算子和矩阵相似

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 集合 $\text{Hom}(V, V)$ 记为 $\mathcal{L}(V)$, 其中的元素称为线性算子. 线性算子通常用 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$ 表示. 特别地 \mathcal{O} 代表 V 上的零算子(映射), \mathcal{E} 代表 V 上的恒等算子(映射).

设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 算子 \mathcal{A} 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵, 简称 \mathcal{A} 为在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵.

2.1 矩阵的相似

设 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是 V 的另一组基, 且

$$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P,$$

其中 $P \in \text{GL}_n(F)$. 设算子 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵等于 A . 根据定理 1.11, \mathcal{A} 在 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 下的矩阵等于 $P^{-1}AP$. 我们的问题是如何选取 V 的一组基使得 \mathcal{A} 在该基下的矩阵尽可能简单(零元素尽可能多,非零元出现的尽可能有规律).

定义 2.1 设 $A, B \in M_n(F)$. 如果存在 $P \in \text{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 B 与 A 相似. 记为 $B \sim_s A$.

验证相似是等价关系如下. 对任意 $A \in M_n(F)$, $A = E^{-1}AE$. 于是 $A \sim_s A$. 自反性成立. 设 $B \sim_s A$. 则存在 $P \in \text{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 于是 $A = PBP^{-1}$, $A \sim_s B$. 对称性成立. 设 $A \sim_s B$, $B \sim_s C$. 则存在 $P, Q \in \text{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$ 和 $C = Q^{-1}BQ$. 于是 $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$, 即 $A \sim_s C$. 传递性成立.

两个矩阵相似当且仅当它们是同一个线性映射在不同基底下的矩阵. 于是, 我们的问题可等价地叙述为矩阵 $A \in M_n(F)$ 研究并计算与 A 相似的尽可能简单的矩阵.

命题 2.2 设 $A, B \in M_n(F)$. 如果 $A \sim_s B$, 则

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B), \quad \det(A) = \det(B), \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(B).$$

证明. 设 $B = P^{-1}AP$, 其中 $P \in GL_n(F)$. 因为乘以可逆矩阵不改变矩阵的秩, 所以 $\text{rank}(B) = \text{rank}(A)$. 由行列式乘法定理可知, $\det(B) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(A)$.

为了证明 $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$. 我们首先注意到迹是交换不变量, 即对任意 $M = (m_{i,j}), N = (n_{i,j}) \in M_n(F)$,

$$\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM).$$

(见上学期第二章第 5 讲命题 7.8.)

我们由 $\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(PP^{-1}A) = \text{tr}(A)$. \square

例 2.3 证明:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \not\sim_s \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明. 因为这两个矩阵的迹不同, 所以它们不相似.

例 2.4 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

问 A 和 B 是否相似?

证明. 设 $P \in GL_2(F)$ 使得 $B = P^{-1}AP$. 则 $PB = AP$, 即 $P(E + C) = P$. 其中

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $PC = O$. 因为 P 可逆, 所以 $C = O$. 矛盾. 这两个矩阵不相似. \square

例 2.5 设 $A, B \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 都正定. 证明: AB 相似于一个正定矩阵.

证明. 因为 A 和 B 正定, 所以存在 $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = P^t P$ 和 $B = Q^t Q$ (第一章定理 9.16). 故

$$AB = P^t P Q^t Q \sim_s Q (P^t P Q^t Q) Q^{-1} = (Q P^t)(P Q^t) = \underbrace{(P Q^t)^t (P Q^t)}_M.$$

因为 $P Q^t$ 可逆, 所以 M 正定 (第一章定理 9.16). \square

2.2 线性算子代数

我们已经知道 $(\mathcal{L}(V), +, \mathcal{O}, \text{数乘})$ 是 F 上的线性空间. 注意到任何两个 V 上的线性算子都可以复合, 且对任意 $A, B, C \in \mathcal{L}(V)$,

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C \quad \text{和} \quad A \circ \mathcal{E} = \mathcal{E} \circ A = A.$$

再由上一讲命题 1.19 可知, $(\mathcal{L}(V), +, \mathcal{O}, \circ, \mathcal{E})$ 是一个环. 此外对任意 $\alpha \in F$,

$$\alpha(A \circ B) = (\alpha A) \circ B = A \circ (\alpha B).$$

这个性质使得我们称 $\mathcal{L}(V)$ 是 F 上的一个代数.

定理 2.6 设

$$\Phi: \mathcal{L}(V) \longrightarrow M_n(F)$$

$$\mathcal{A} \mapsto A, \quad \mathcal{A} \text{ 在 } \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \text{ 下的矩阵}$$

则 Φ 既是线性同构又是环同构 (此时称 Φ 是代数同构).

证明. 根据定理 1.9, Φ 是线性同构. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$, 它们在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵分别是 A, B . 根据命题 1.10, $\Phi(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = AB = \Phi(\mathcal{A})\Phi(\mathcal{B})$. 可直接验证 $\Phi(\mathcal{E}) = E_n$. \square .

为了简洁, $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ 也写成 $\mathcal{A}\mathcal{B}$. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 \mathcal{A} 可逆, 则称 \mathcal{A} 是可逆算子. 如果存在 $\lambda \in F$ 使得对任意 $\mathbf{x} \in V$, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, 则称 \mathcal{A} 是数乘算子. 此时 $\mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}$. 如果存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$, 则称 \mathcal{A} 是幂零算子. 如果 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 则称 \mathcal{A} 是幂等算子.

由上述定理可知, \mathcal{A} 是可逆(数乘, 幂零, 幂等)算子当且仅当 $\Phi(\mathcal{A})$ 是(数乘, 幂零, 幂等)矩阵.

例 2.7 设 $\mathcal{D}: \mathbb{R}[x]^{(n)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(n)}$ 由公式 $\mathcal{D}(f) = f'$ 定义. 则 $\mathcal{D}^n = \mathcal{O}$. 该算子在 $1, x, \dots, x^{n-1}$ 下的矩阵是:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

例 2.8 设 U_1, U_2 是 V 的子空间满足 $V = U_1 \oplus U_2$. 设 π_i 是 V 关于上述直和到 U_i 的投影, $i = 1, 2$. 设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ 是 U_1 的基, $\mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 U_2 的基. 则 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{e}_{d+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的基. 在该基下 π_1 和 π_2 的矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} E_d & O \\ O & O \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} O & O \\ O & E_{n-d} \end{pmatrix}.$$

2.3 核像分解

定理 2.9 (核像分解) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则以下四个断言等价:

$$(i) \quad V = \ker(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{im}(\mathcal{A}),$$

$$(ii) \quad \operatorname{im}(\mathcal{A}) = \operatorname{im}(\mathcal{A}^2),$$

$$(iii) \quad \operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathcal{A}^2),$$

$$(iv) \quad \ker(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{A}^2).$$

证明. (i) \implies (ii). 设 $\mathbf{x} \in \operatorname{im}(\mathcal{A})$. 则存在 $\mathbf{y} \in V$ 使得 $\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathbf{y})$. 因为 $V = \ker(\mathcal{A}) + \operatorname{im}(\mathcal{A})$, 所以存在 $\mathbf{u} \in \ker(\mathcal{A})$, $\mathbf{v} \in \operatorname{im}(\mathcal{A})$ 使得 $\mathbf{y} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ 且 $\mathbf{v} = \mathcal{A}(\mathbf{w})$, 其中 \mathbf{w} 是 V 中某个向量. 于是 $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathcal{A}(\mathbf{w})$, 从而

$$\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{u}) + \mathcal{A}^2(\mathbf{w}) = \mathcal{A}^2(\mathbf{w}) \in \operatorname{im}(\mathcal{A}^2).$$

我们有 $\text{im}(\mathcal{A}) \subset \text{im}(\mathcal{A}^2)$.

(ii) \implies (iii). 因为 $\dim(\text{im}(\mathcal{A})) = \dim(\text{im}(\mathcal{A}^2))$, 所以 $\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A}^2)$.

(iii) \implies (iv). 根据对偶定理, 我们有

$$\dim(\ker(\mathcal{A})) + \text{rank}(\mathcal{A}) = n \quad \text{and} \quad \dim(\ker(\mathcal{A}^2)) + \text{rank}(\mathcal{A}^2) = n.$$

于是, $\dim(\ker(\mathcal{A})) = \dim(\ker(\mathcal{A}^2))$. 因为 $\ker(\mathcal{A}) \subset \ker(\mathcal{A}^2)$ (直接验证), 所以 $\ker(\mathcal{A}) = \ker(\mathcal{A}^2)$.

(iv) \implies (i). 设 $\mathbf{x} \in \ker(\mathcal{A}) \cap \text{im}(\mathcal{A})$. 则存在 $\mathbf{y} \in V$ 使得 $\mathbf{x} = \mathcal{A}(\mathbf{y})$. 我们有

$$\mathcal{A}^2(\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathbf{y})) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

故 $\mathbf{y} \in \ker(\mathcal{A}^2)$. 从而, $\mathbf{y} \in \ker(\mathcal{A})$. 由此得出, $\mathcal{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. 于是, $\ker(\mathcal{A}) + \text{im}(\mathcal{A})$ 是直和且

$$\dim(\ker(\mathcal{A}) + \text{im}(\mathcal{A})) = \dim(\ker(\mathcal{A})) + \dim(\text{im}(\mathcal{A})) = n \quad (\text{对偶定理}).$$

由此得到 (i). \square

例 2.10 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. 证明

$$\ker(\mathcal{A}) \oplus \text{im}(\mathcal{A}) = V.$$

证明. 因为 $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, 所以 $\text{rank}(\mathcal{A}^2) = \text{rank}(\mathcal{A})$. 由上述核像分解定理可知结论成立. \square

例 2.11 设 \mathcal{D} 是 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$ 上的导数算子. 则 $\ker(\mathcal{D}) = \mathbb{R}$ 且 $\text{im}(\mathcal{D}) = \mathbb{R}[x]^{(n-1)}$. 因为 $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x]^{(n-1)}$, 所以 $\ker(\mathcal{D}) + \text{im}(\mathcal{D})$ 不是直和.

3 极小多项式

注解 3.1 设 $A, B \in M_n(F)$ 且 $A \sim_s B$. 则存在 $P \in \text{GL}_n(F)$ 使得 $A = P^{-1}BP$. 则

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k = P^{-1}B^kP.$$

进而,

$$\forall f \in F[t], f(A) = P^{-1}f(B)P.$$

特别地, $f(A) \sim_s f(B)$.

定义 3.2 设 $f \in F[t]$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 如果 $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, 则称 f 是关于 \mathcal{A} 的零化多项式. 关于 \mathcal{A} 的非零的零化多项式中次数最小的称为 \mathcal{A} 的极小多项式. 为明确起见, 我们设极小多项式是首一的.

类似地, 对 $A \in M_n(F)$, 我们有关于 A 的零化多项式和极小多项式的概念.

引理 3.3 (极小多项式的整除判别法) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $f(t) \in F[t]$, $p(t) \in F[t] \setminus \{0\}$ 零化 \mathcal{A} 且首一. 则

$$p = \mu_{\mathcal{A}} \iff \text{对任意 } f \in F[t] \text{ 零化 } \mathcal{A}, \quad p|f.$$

证明. 由多项式除法可知 $f(t) = q(t)p(t) + r(t)$, 其中 $q, r \in F[t]$ 且 $\deg(r) < \deg(p)$. 由赋值同态定理 $f(\mathcal{A}) = q(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A})$. 因为 $p(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, 所以 $f(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A})$.

如果 $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, 则 $r(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 由极小多项式的定义可知, $r(t) = 0$. 即 $p|f$. 反之, 因为 $\mu_{\mathcal{A}}$ 零化 \mathcal{A} , 所以 $p|\mu_{\mathcal{A}}$. 由此可知, $\deg(p) \leq \deg(\mu_{\mathcal{A}})$. 根据极小多项式的定义, $\deg(p) \geq \deg(\mu_{\mathcal{A}})$. 再利用首一性, $\mu_{\mathcal{A}} = p$. \square

命题 3.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 则 \mathcal{A} 的极小多项式存在且唯一. 极小多项式的次数不大于 n^2 .

证明. 因为 $\dim(\mathcal{L}(V)) = n^2$, 所以 $1, \mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}^{n^2}$ 在 F 上线性相关. 由此可知, \mathcal{A} 有非零的次数不高于 n^2 的零化多项式. 于是, 极小多项式存在且次数不高于 n^2 . 设 p, q 是 \mathcal{A} 的两个极小多项式. 则 $\deg(p) = \deg(q)$. 由引理 3.3, $p|q$ 且 $q|p$. 于是 $p = cq$, 其中 $c \in F \setminus \{0\}$. 因为 p 和 q 都首一, 所以 $c = 1$. \square

注解 3.5 以上结论对 $A \in M_n(F)$ 同样成立.

记号. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $A \in M_n(F)$. 它们的极小多项式分别记为 $\mu_{\mathcal{A}}$ 和 μ_A .

例 3.6 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 证明 $\deg(\mu_{\mathcal{A}}) = 1$ 当且仅当 \mathcal{A} 是数乘算子.

证明. 设 $\mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}$, $\lambda \in F$. 则 $\mu_{\mathcal{A}} = t - \lambda$. 反之, 设 $\mu_{\mathcal{A}} = t - \lambda$. 则 $\mathcal{O} = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$. 于是, $\mathcal{A} = \lambda\mathcal{E}$. \square

特别地, $\mu_{\mathcal{O}} = t$, $\mu_{\mathcal{E}} = t - 1$.