

第一章 空间与形式

10.2 二次曲线和二次曲面分类

设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. 定义

$$S_p = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t \in \mathbb{R}^n \mid p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0\}$$

称为由 p 定义的超曲面. 当 $\deg(p) = 2$ 时, S_p 称为二次超曲面, \mathbb{R}^2 中的二次超曲面称为二次曲线, \mathbb{R}^3 中的二次超曲面称为二次曲面.

设 $\deg(p) = 2$, p 的齐二次部分等于 q , q 的秩等于 r , 签名是 (k, ℓ) . 则 $r > 0$ 且 $k + \ell = r$.

首先考虑二次曲线 ($n = 2$).

情形 C_1 . $r = 2$.

(1a) $(k, \ell) = (2, 0)$. $p = x_1^2 + x_2^2 - \mu$. 如果 $\mu < 0$, 则 $S_p = \emptyset$; 如果 $\mu = 0$, 则 $S_p = \{\mathbf{0}_2\}$; 如果 $\mu > 0$, 则 S_p 是(椭圆).

(1b) $(k, \ell) = (0, 2)$. 与 (1a) 类似.

(1c) $k = 1, \ell = 1$. $p = x_1^2 - x_2^2 - \mu$. 如果 $\mu \neq 0$, 则 S_p 是双曲线. 如果 $\mu = 0$, 则 S_p 是两条相交于一点的直线.

情形 C_2 . $r = 1$.

(2a) $k = 1, \ell = 0$. 如果 $p = x_1^2 - x_2$, 则 S_p 是抛物线. 如果 $p = x_1^2 - \mu$, 则 $S_p = \emptyset$ ($\mu < 0$); S_p 是两条重合的直线 ($\mu = 0$); S_p 是两条平行直线 ($\mu > 0$).

(2b) $k = 0, \ell = 1$. 与 (2a) 类似.

再考虑二次曲面 ($n = 3$).

情形 S_1 . $r = 3$.

(1a) $(k, \ell) = (3, 0)$. $p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \mu$. 如果 $\mu < 0$, 则 $S_p = \emptyset$; 如果 $\mu = 0$, 则 $S_p = \{\mathbf{0}_3\}$; 如果 $\mu > 0$, 则 S_p 是(椭)球面.

(1b) $(k, \ell) = (0, 3)$. 与 (1a) 类似.

(1c) $(k, \ell) = (2, 1)$. $p = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \mu$. 如果 $\mu < 0$, 则 S_p 是双叶双曲面. 如果 $\mu = 0$, 则 S_p 是(椭)圆锥面. 如果 $\mu > 0$, 则 S_p 是单叶双曲面.

情形 S_2 . $r = 2$.

(2a) $(k, \ell) = (2, 0)$. 如果 $p = x_1^2 + x_2^2 - x_3$, 则 S_p 是椭圆抛物面; 如果 $p = x_1^2 + x_2^2 - \mu$, 则 $S_p = \emptyset$ ($\mu < 0$); $S_p = \{\mathbf{0}_3\}$ ($\mu = 0$); S_p (椭)圆柱面 ($\mu > 0$).

(2b) $(k, \ell) = (0, 2)$. 与 (2a) 类似.

(2c) $(k, \ell) = (1, 1)$. 如果 $p = x_1^2 - x_2^2 - x_3$, 则 S_p 是双曲抛物面. 如果 $p = x_1^2 - x_2^2 - \mu$, 则 S_p 是双曲柱面 ($\mu \neq 0$); S_p 是两张相交于一条直线的平面 ($\mu = 0$).

情形 S_3 . $r = 1$.

(3a) $(k, \ell) = (1, 0)$. 如果 $p = x_1^2 - x_2$, 则 S_p 是抛物柱面; 如果 $p = x_1^2 - \mu$, 则 $S_p = \emptyset$ ($\mu < 0$); S_p 是两张重合的平面 ($\mu = 0$); S_p 是两张平行的平面 ($\mu > 0$).

(3b) $(k, \ell) = (0, 1)$. 与 (3a) 类似.

11 斜对称双线性型

在本节中 F 是特征不等于 2 的域, V 是 F 线性空间.

引理 11.1 设 $f \in \mathcal{L}_2(V)$. 则 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$ 当且仅当对任意 $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

证明. 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$. 因为 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, 所以 $2f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 于是 $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 反之, 设对任意 $\mathbf{x} \in V$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 则任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$\begin{aligned} 0 &= f(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \\ &= f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

由此得出 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. \square

引理 11.2 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$, 则 \mathbf{u}, \mathbf{v} 线性无关.

证明. 因为 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$, 所以 \mathbf{u}, \mathbf{v} 都不是零向量. 假设 \mathbf{u}, \mathbf{v} 线性相关. 则存在 $\alpha \in F \setminus \{0\}$ 使得 $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v}$. 由引理 11.1 可知, $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\alpha\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$. 矛盾. \square

定义 11.3 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$. 则 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 称为 f 的辛平面 (*symplectic plane*).

引理 11.4 设 $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, W 是 f 的辛平面, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基. 则 $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$.

证: 设 $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ 使得 $f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq 0$. 因为 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基, 所以存在 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F$ 使得

$$\mathbf{v}_1 = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_2 = \beta_1\mathbf{w}_1 + \beta_2\mathbf{w}_2.$$

于是

$$0 \neq f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = f(\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2, \beta_1\mathbf{w}_1 + \beta_2\mathbf{w}_2) = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2).$$

由此可知 $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$. \square

引理 11.5 设 V 是 F 上的 n 维线性空间, $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$, W 是 f 的辛平面. 则存在 V 中子空间 \widetilde{W} 满足对任意的 $\mathbf{x} \in W, \mathbf{y} \in \widetilde{W}$ 使得 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, 且 $V = W \oplus \widetilde{W}$.

证明. 设 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 是 W 的一组基,

$$U_i = \{\mathbf{y} \in V \mid f(\mathbf{w}_i, \mathbf{y}) = 0\},$$

$i = 1, 2$. 由 f 的双线性性可知, U_1, U_2 都是子空间. 根据引理 11.4, $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \neq 0$. 于是 $\mathbf{w}_2 \notin U_1$. 由 f 的斜对称性可知 $f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) \neq 0$. 于是 $\mathbf{w}_1 \notin U_2$. 即 $l_1 = f(\mathbf{w}_1, \mathbf{y})$ 和 $l_2 = f(\mathbf{w}_2, \mathbf{y})$ 都是关于 \mathbf{y} 的非零线性函数. 于是 $\dim(\text{im}(l_i))=1$. 进而 $U_i = \ker(l_i)$ 的维数是 $n - 1, i = 1, 2$.

令 $\widetilde{W} = U_1 \cap U_2$. 则对于任意 $\mathbf{y} \in \widetilde{W}$,

$$f(\mathbf{w}_1, \mathbf{y}) = f(\mathbf{w}_2, \mathbf{y}) = 0.$$

由 f 的双线性可知, 对任意的 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$,

$$f(\alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2, \mathbf{y}) = 0.$$

即对于任意 $\mathbf{x} \in W, \mathbf{y} \in \widetilde{W}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

根据维数公式, 我们有

$$\dim(\widetilde{W}) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 + U_2) \geq n - 1 + n - 1 - n = n - 2.$$

若 $\mathbf{w} \in W \cap \widetilde{W}$, 则存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ 使得 $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{w}_1 + \alpha_2 \mathbf{w}_2$.

又因为 $\mathbf{w} \in \widetilde{W}$, 所以

$$f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}) = 0 \implies \alpha_1 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0.$$

由引理 11.1, $\alpha_1 f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) = 0$. 再由引理 11.4, $\alpha_2 = 0$. 类似地, 从 $f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) = 0$ 可推出 $\alpha_1 = 0$. 于是 $\mathbf{w} = 0$. 即

$W + \widetilde{W}$ 是直和. 由此可得.

$$\dim(W \oplus \widetilde{W}) = \dim(W) + \dim(\widetilde{W}) \geq 2 + n - 2 = n.$$

从而 $V = W \oplus \widetilde{W}$. \square

定理 11.6 设 V 是 F 上的有限维线性空间, $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$. 则存在 f 的辛平面 W_1, \dots, W_k 和子空间 U 满足

(i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \oplus U$;

(ii) $f|_{U \times U}$ 上是零双线性型;

(iii) 对任意 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\mathbf{x} \in W_1 \oplus \dots \oplus W_i$, $\mathbf{y} \in W_{i+1} \oplus \dots \oplus W_k \oplus U$, 我们有 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

证明. 如果 f 是零双线性型, 则取 $k = 0$ 和 $U = V$ 即可. 我们假设 f 非零且 $n = \dim(V)$. 则 $n > 1$.

对 n 归纳. 设 $n = 2$. 因为 f 非零, 所以存在 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 使得 $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. 由引理 11.2, 我们有 $V = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 是 f 的辛平面. 此时取 $W_1 = V$, $k = 1$ 和 $U = \{\mathbf{0}\}$ 即可.

设 $n > 1$ 且结论对维数小于 n 的线性空间成立. 因为 f 非零, 所以存在 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$ 使得 $f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = 0$. 则 $W_1 = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$. 根据引理 11.5, 存在 V 的子空间 \widetilde{W}_1 使得对任意 $\mathbf{x} \in W_1$, $\mathbf{y} \in \widetilde{W}_1$ 我们有 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ 且 $V = W_1 \oplus \widetilde{W}_1$. 考虑 \widetilde{W}_1 上的斜对称双线性型 $f_1 = f|_{\widetilde{W}_1 \times \widetilde{W}_1}$. 如果 f_1 是零

映射, 则取 $k = 1$ 和 $U = \widetilde{W}_1$ 即可. 否则, 由归纳假设存在 f_1 的辛平面 W_2, \dots, W_k 和 \widetilde{W}_1 的子空间 U 使得

(i) $\widetilde{W} = W_2 \oplus \dots \oplus W_k \oplus U$;

(ii) $f_1|_{U \times U}$ 上是零双线性型;

(iii) 对任意 $j \in \{2, 3, \dots, k\}$, $\mathbf{x} \in W_2 \oplus \dots \oplus W_j$, $\mathbf{y} \in W_{j+1} \oplus \dots \oplus W_k \oplus U$, 我们有 $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

则 $V = W_1 \oplus \widetilde{W} = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k \oplus U$. 进而 $f|_{U \times U} = f_1|_{U \times U}$ 上是零双线性型. 设 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\mathbf{x} \in W_1 \oplus \dots \oplus W_i$, $\mathbf{y} \in W_{i+1} \oplus \dots \oplus W_k \oplus U$. 则 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, 其中 $\mathbf{x}_1 \in W_1$, $\mathbf{x}_2 \in W_2 \oplus \dots \oplus W_i$. 则

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = 0 + 0 = 0.$$

于是, W_1, W_2, \dots, W_k, U 即为所求. \square .

定理 11.7 设 V 是 F 上 n 维线性空间, $f \in \mathcal{L}_2^-(V)$. 则存在 V 的一组基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 使得 f 在该基下的矩阵等于

$$M = \begin{pmatrix} S_2 & & & & \\ & S_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & S_2 & \\ & & & & O_{(n-2k) \times (n-2k)} \end{pmatrix},$$

其中

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, 2k = \text{rank}(f).$$

证明. 根据定理 11.6, 存在 f 的辛平面 W_1, \dots, W_k 和子空间 U 满足定理 11.6 中的三个性质. 设 $\mathbf{w}_{2i-1}, \mathbf{w}_{2i}$ 是 W_i 的一组基. 根据引理 11.4, $\alpha_i = f(\mathbf{w}_{2i-1}, \mathbf{w}_{2i}) \neq 0$. 令 $\mathbf{e}_{2i-1} = \alpha_i^{-1} \mathbf{w}_{2i-1}, \mathbf{e}_{2i} = \mathbf{w}_{2i}$. 则 $f(\mathbf{e}_{2i-1}, \mathbf{e}_{2i}) = 1, i = 1, 2, \dots, k$. 由直和分解 $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k \oplus U$ 可知, $\dim(U) = n - 2k$. 再设 $\mathbf{e}_{2k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 U 的一组基. 上述直和分解保证 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{2k-1}, \mathbf{e}_{2k}, \mathbf{e}_{2k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 由定理 11.6 中的第二和第三个性质可知, f 在这组基下的矩阵为 M . \square

推论 11.8 设 $A \in \text{SSM}_n(F)$. 则 A 秩是偶数. 设 $\text{rank}(A) = 2k$. 则

$$A \sim_c \begin{pmatrix} S_2 & & & & \\ & S_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & S_2 & \\ & & & & O_{(n-2k) \times (n-2k)} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明. 设 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ 是 F^n 上的双线性

型. 因为 A 斜对称, 所以 f 斜对称. 根据定理 11.7, A 与上述矩阵合同. 于是 $\text{rank}(A) = 2k$. \square

例 11.9 证明 F 上奇数阶斜对称方阵的行列式等于零; 偶数阶斜对称方阵的行列式等于 F 中某个元素的平方.

证明. 设 $A \in \text{SSM}_n(F)$. 如果 n 是奇数, 则推论 11.9 指出 A 不满秩. 于是 $\det(A) = 0$. 设 n 是偶数. 如果 A 不满秩, 则结论显然成立. 否则存在 $P \in \text{GL}_n(F)$ 使得

$$A = P^t \begin{pmatrix} S_2 & & & & \\ & S_2 & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & S_2 & \\ & & & & S_2 \end{pmatrix} P, \quad \text{其中 } S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $\det(A) = \det(P^t) \det(S_2)^{\frac{n}{2}} \det(P) = \det(P)^2$. \square

例 11.10 设 A 是整数环上偶数阶斜对称满秩方阵. 证明 $\det(A)$ 是某个正整数的平方.

证明. 注意到 $A \in \text{SSM}_n(\mathbb{Q})$. 由上例可知 $\det(A) = a^2$, 其中 a 是某个正有理数. 但 $\det(A) \in \mathbb{Z}^+$. 如果 a 不是整数, 则 a^2 也不是. 等式 $\det(A) = a^2$ 不可能成立. 于是 $a \in \mathbb{Z}^+$.

在上例假设条件下 $\sqrt{\det(A)}$ 称为 A 的 *Pfaffian*.

第二章 线性算子

1 不同基底下线性映射的矩阵表示

在本节中 F 是任意域, V 和 W 是 F 上的线性空间, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ 是 W 的一组基.

1.1 线性映射下的矩阵 (复习、扩展和例子)

设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$,

$$\phi(\mathbf{e}_j) = a_{1,j}\epsilon_1 + \cdots + a_{m,j}\epsilon_m = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix},$$

$j = 1, 2, \dots, n$. 称

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

是 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ 下的矩阵(表示). 当 V 和 W 的基底选定后 ϕ 的矩阵是唯一的. 我们有

$$(\phi(\mathbf{e}_1), \dots, \phi(\mathbf{e}_n)) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)A.$$

设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\phi(\mathbf{x}) = y_1\epsilon_1 + \cdots + y_m\epsilon_m$.

则

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

例 1.1 设 $V = F^n$, $W = F^m$, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ 都是标准基. 则 ϕ 的矩阵表示是

$$(\phi(\mathbf{e}_1), \dots, \phi(\mathbf{e}_n)).$$

例 1.2 设 $\phi: V \rightarrow W$ 由公式 $\forall \mathbf{x} \in V, \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$ 给出. 则 ϕ 在 V 和 W 的任意基底下的矩阵都是 $O_{m \times n}$.

例 1.3 设 $\phi: V \rightarrow V$ 由公式 $\forall \mathbf{x} \in V, \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ 给出. 则 ϕ 在 V 的任意基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵都是 E_n .

例 1.4 设 V 是 W 的子空间, $\phi: V \rightarrow W$ 由公式 $\forall \mathbf{x} \in V, \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ 给出. 取 W 的基是 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{n+1}, \dots, \mathbf{e}_m$. 则 ϕ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_n \\ O_{(m-n) \times n} \end{pmatrix}.$$

例 1.5 线性空间 V 上的线性函数. 见第一章第三讲例 5.6.

例 1.6 设 $A \in F^{m \times n}$, $\phi : F^{n \times k} \longrightarrow F^{m \times k}$ 由公式 $\forall X \in F^{n \times k}$, $\phi(X) = AX$ 给出. 求 ϕ 在标准基下的矩阵.

解. 对 $j = 1, 2, \dots, k$,

$$\overrightarrow{\phi(X)}^{(j)} = A\vec{X}^{(j)}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\phi(X)}^{(1)} \\ \vdots \\ \overrightarrow{\phi(X)}^{(k)} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & O & \cdots & O \\ O & A & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} \vec{X}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{X}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

矩阵 B 是 ϕ 在标准基下的矩阵. 此时标准基的顺序如下. 设 $E_{i,j} \in F^{n \times k}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$; $L_{i,j} \in F^{m \times k}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ 分别是两个矩阵空间的标准基. 则 $F^{n \times k}$ 的标准基排列是

$$E_{1,1}, E_{2,1}, \dots, E_{n,1}, \dots, E_{1,k}, \dots, E_{n,k}.$$

类似地, $F^{m \times k}$ 的标准基排列是

$$L_{1,1}, L_{2,1}, \dots, L_{m,1}, \dots, L_{1,k}, \dots, L_{m,k}.$$

引理 1.7 设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$, $M \in F^{k \times \ell}$. 则定义

$$\phi(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := (\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k)).$$

则

$$\phi((\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)M) = (\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k))M.$$

证明. 设 $M = (m_{i,j})_{k \times \ell}$. 则

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)M = \left(\sum_{i=1}^k m_{i,1} \mathbf{v}_i, \dots, \sum_{i=1}^k m_{i,\ell} \mathbf{v}_i \right).$$

于是

$$\begin{aligned} \phi((\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)M) &= \phi \left(\sum_{i=1}^k m_{i,1} \mathbf{v}_i, \dots, \sum_{i=1}^k m_{i,\ell} \mathbf{v}_i \right) \\ &= \left(\phi \left(\sum_{i=1}^k m_{i,1} \mathbf{v}_i \right), \dots, \phi \left(\sum_{i=1}^k m_{i,\ell} \mathbf{v}_i \right) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^k m_{i,1} \phi(\mathbf{v}_i), \dots, \sum_{i=1}^k m_{i,\ell} \phi(\mathbf{v}_i) \right) \\ &= (\phi(\mathbf{v}_1), \dots, \phi(\mathbf{v}_k))M. \quad \square \end{aligned}$$

命题 1.8 设 $A \in F^{m \times n}$. 则存在唯一的 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ 使得 ϕ 在基底 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ 下的矩阵等于 A .

证明. 设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ 满足 $\phi(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) \vec{A}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n$. 由线性映射基本定理 II 可知 ϕ 存在. 由矩阵表示的定义可知, A 是 ϕ 在选定基底下的矩阵. 映射 ϕ 的唯一性由线性映射基本定理 II 中的唯一性得出. \square

定理 1.9 设

$$\begin{aligned}\Phi: \text{Hom}(V, W) &\longrightarrow F^{m \times n} \\ \phi &\longmapsto A, \quad \phi \text{ 在选定基底下的矩阵}\end{aligned}$$

则 Φ 是线性同构.

证明. 设 $\phi, \psi \in \text{Hom}(V, W)$, $A = \Phi(\phi)$ 和 $B = \Phi(\psi)$. 再设 $\alpha, \beta \in F$. 对 $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned}(\alpha\phi + \beta\psi)(\mathbf{e}_j) &= \alpha\phi(\mathbf{e}_j) + \beta\psi(\mathbf{e}_j) \\ &= \alpha(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)\vec{A}^{(j)} + \beta(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)\vec{B}^{(j)} \\ &= (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)(\alpha\vec{A}^{(j)} + \beta\vec{B}^{(j)}) \\ &= (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)\vec{C}^{(j)}, \quad \text{其中 } C = \alpha A + \beta B.\end{aligned}$$

于是, $\Phi(\alpha\phi + \beta\psi) = C = \alpha A + \beta B = \alpha\Phi(\phi) + \beta\Phi(\psi)$. 映射 Φ 是线性的.

设

$$\begin{aligned}\Theta: F^{m \times n} &\longrightarrow \text{Hom}(V, W) \\ A &\longmapsto \phi, \quad \phi \text{ 由命题 1.8 的证明中定义.}\end{aligned}$$

根据线性映射基本定理 II 和命题 1.8, $\Theta \circ \Phi(\phi) = \phi$ 且 $\Phi \circ \Theta(A) = A$. 验证如下. 设 $A = \Phi(\phi)$. 则 $\Theta(A)(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)\vec{A}^{(j)}$. 于是, $\Theta(A)(\mathbf{e}_j) = \phi(\mathbf{e}_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$. 由线性映射基本定理 II 可知, $\Theta(A) = \phi$. 反之, 设 $\phi = \Theta(A)$. 则 $\phi(\mathbf{e}_j) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)\vec{A}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n$. 于是 $\Phi(\phi) = A$. \square

命题 1.10 设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ 下的矩阵是 A . 设 Z 是 F 上的线性空间 $\delta_1, \dots, \delta_k$ 是 Z 的一组基, $\psi \in \text{Hom}(W, Z)$ 在 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m; \delta_1, \dots, \delta_k$ 下的矩阵是 $B \in F^{k \times m}$. 则 $\psi \circ \phi \in \text{Hom}(V, Z)$ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n; \delta_1, \dots, \delta_k$ 下的矩阵是 $BA \in F^{k \times n}$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi} & W \\ & \searrow \psi \circ \phi & \downarrow \psi \\ & & Z \end{array}$$

证明. 关于 $\psi \circ \phi$ 是线性映射的验证见上学期第二章命题 4.1. 计算

$$\psi \circ \phi(\mathbf{e}_j) = (\psi(\epsilon_1), \dots, \psi(\epsilon_m)) \vec{A}^{(j)} = (\delta_1, \dots, \delta_k) B \vec{A}^{(j)},$$

$j = 1, 2, \dots, n$. 于是

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi(\mathbf{e}_1), \dots, \psi \circ \phi(\mathbf{e}_n)) &= (\delta_1, \dots, \delta_k) B (\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}) \\ &= (\delta_1, \dots, \delta_k) BA. \end{aligned}$$

映射 $\psi \circ \phi$ 在选定基底下的矩阵是 BA . \square

1.2 线性映射在不同基底下的矩阵

定理 1.11 设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$. 再设 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的另一组基, $\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m$ 是 W 的另一组基, 且

$$(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P \quad \text{和} \quad (\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)Q,$$

其中 $P \in \text{GL}_n(F)$ 和 $Q \in \text{GL}_m(F)$. 如果 ϕ 在 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$; $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ 下的矩阵是 A , 则 ϕ 在 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$; $\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m$ 下的矩阵是 $Q^{-1}AP$.

证明. 由 $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)P$ 和引理 1.7 得

$$(\phi(\mathbf{e}'_1), \dots, \phi(\mathbf{e}'_n)) = (\phi(\mathbf{e}_1), \dots, \phi(\mathbf{e}_n))P.$$

于是

$$(\phi(\mathbf{e}'_1), \dots, \phi(\mathbf{e}'_n)) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)AP = (\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m)Q^{-1}AP. \quad \square$$

上述定理说明线性映射在不同基底下的矩阵有相同的秩.

定义 1.12 设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$, A 是 ϕ 在 V 的一组基和 W 的一组基下的矩阵. 则 $\text{rank}(A)$ 称为 ϕ 的秩, 记为 $\text{rank}(\phi)$.

推论 1.13 设 $\phi \in \text{Hom}(V, W)$ 且 $\text{rank}(\phi) = r$. 则存在 V 的一组基 $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ 和 W 的一组基 $\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_m$ 使得在该基下 ϕ 的矩阵是

$$M = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m \times n}$$

且 $r = \dim(\text{im}(\phi))$.

证明. 设 $d = \dim(\ker(\phi))$, $\mathbf{e}'_{n-d+1}, \dots, \mathbf{e}'_n$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基. 把它扩充为 V 的一组基

$$\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_{n-d}, \mathbf{e}'_{n-d+1}, \dots, \mathbf{e}'_n.$$

因为 $\text{im}(\phi) = \langle \phi(\mathbf{e}'_1), \dots, \phi(\mathbf{e}'_n) \rangle$ 且 $\phi(\mathbf{e}'_{n-d+1}) = \dots = \phi(\mathbf{e}'_n) = \mathbf{0}_W$, 所以

$$\text{im}(\phi) = \langle \phi(\mathbf{e}'_1), \dots, \phi(\mathbf{e}'_{n-d}) \rangle.$$

因为 $\dim(\text{im}(\phi)) = n - d$, 所以 $\epsilon'_1 = \phi(\mathbf{e}'_1), \dots, \epsilon'_{n-d} = \phi(\mathbf{e}'_{n-d})$ 是 $\text{im}(\phi)$ 的一组基. 将其扩充为 W 的一组基

$$\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_{n-d}, \epsilon'_{n-d+1}, \dots, \epsilon'_m.$$

则 ϕ 在上述基底下的矩阵等于 M . 特别地, $r = n - d$. \square

注解 1.14 根据推论 1.13, 第一章第二讲命题 4.14 (iii) 可写为

$$\dim(\ker(\phi)) + \text{rank}(\phi) = \dim(V).$$