第一章　空间与形式

例 9.11 证明 $(a) \in \mathrm{M}_1(\mathbb{R})$ 是正定的当且仅当 $a > 0$. 判定

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

是不是正定的.

证明. 矩阵 (a) 对应 $\mathbb{R}$ 上的二次型 $q(x) = ax^2$. 而 q 正定当且仅当 $a > 0$.

利用行列相伴变换可得

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow A \text{ 的签名是 } (1, 1).$$

于是 A 是不定的.

例 9.12 设 $p, q \in \mathcal{Q}(V)$是半正定的. 证明 $p + q$ 也是半正定的; 若上述 p, q 中还有一个是正定的, 则 $p + q$ 也是正定的.

证明. 设 p, q 是半正定的. 则对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $p(\mathbf{x}) \geq 0$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$. 于是

$$(p + q)(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \geq 0.$$

再设 p 是正定的. 则对于任意的 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $p(\mathbf{x}) > 0$. 于是

$$(p + q)(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) > 0. \quad \square$$

类似地可证明下列结论.

注解 9.13 设 $A, B \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 是半正定的, 则 $A+B$ 也是半正定的; 进一步设 A, B 中还有一个是正定的, 则 $A+B$ 也是正定的.

设 $q \in \mathcal{Q}(V)$. 定义

$$C_q = \{\mathbf{v} \in V \mid q(\mathbf{v}) = 0\}.$$

称 C_q 为 q 确定的锥面(cone).

例 9.14 设 $q \in \mathcal{Q}(V)$. 证明 C_q 是 V 的子空间当且仅当 q 是半正定或半负定的.

证明. 设 q 的签名是 (k, ℓ).

设 C_q 是 V 中的子空间. 如果 $k > 0$ 且 $\ell > 0$. 根据惯性定理 q 在 V 的某组基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 + \cdots + x_{k+\ell}^2$, 其中 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_k\mathbf{e}_k + x_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. 于是 $q(\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1}) = 1 - 1 = 0$ 且 $q(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+1}) = 0$. 由此可知

$$\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+1} \in C_q \implies 2\mathbf{e}_k \in C_q \implies q(2\mathbf{e}_k) = 0 \implies 4 = 0.$$

矛盾. 于是 $k = 0$ 或 $\ell = 0$. 即 q 是半负定或半正定的.

反之, 不妨设 q 是半正定的. 根据惯性定理 q 在 V 的某组基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2.$$

设 $U = \langle \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$. 则 $U \subset C_q$. 设 $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \in C_q$. 则

$$q(\mathbf{v}) = v_1^2 + \cdots + v_k^2 = 0.$$

因为 $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}$, 所以 $v_1 = \cdots = v_k = 0$. 于是

$$\mathbf{v} = v_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \cdots + v_n\mathbf{e}_n \in U,$$

即 $C_q \subset U$. 综上所述, $U = C_q$. $\square$

9.3 （半）正定矩阵的等价条件

实数域的一个基本性质是：设 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. 则

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0; \quad x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \Longrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

这个性质的矩阵版如下: 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \mathbf{x}^t\mathbf{x} \geq 0; \quad \mathbf{x}^t\mathbf{x} = 0 \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

引理 9.15 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $A^tA \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$, 半正定且 $\mathrm{rank}(A^tA) = \mathrm{rank}(A)$.

证明. 计算 $(A^tA)^t = A^t(A^t)^t = A^tA$ 得出 $A^tA \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$.

设 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. 则

$$\mathbf{x}^t(A^tA)\mathbf{x} = \mathbf{y}^t\mathbf{y} \geq 0.$$

故 A^tA 半正定.

设 U, V 是分别是以 A 和 A^tA 为系数的齐次线性方程组的解空间. 则 $U \subset V$. 反之, 设 $\mathbf{x} \in V$. 则

$$A^tA\mathbf{x} = \mathbf{0}_n \in \mathbb{R}^n.$$

于是, $\mathbf{y}^t\mathbf{y} = 0$. 由此得出 $\mathbf{y} = \mathbf{0}_m \in \mathbb{R}^m$, 即 $\mathbf{x} \in U$. 由此得出 $U = V$. 特别地, $\dim(U) = \dim(V)$. 由方程组版的对偶定理, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^tA)$. □

定理 9.16 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 则

(i) A 半正定当且仅当存在 $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = B^tB$.

(ii) A 正定当且仅当存在 $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = B^tB$.

证明. (i) 设 A 半正定. 则由矩阵版的惯性定理存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^tAP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $r = \operatorname{rank}(A)$, 也是 A 的正惯性指数. 于是

$$A = \left(P^{-1}\right)^t \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = \left(P^{-1}\right)^t \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}}_{B} = B^tB.$$

反之, 根据引理 9.15, $A = B^tB$ 是半正定的.

(ii) 设 A 正定. 则由矩阵版的惯性定理存在 $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^tAP=E_n$. 于是, $A=\left(P^{-1}\right)^t P^{-1}$. 反之, 根据引理 9.15, $A=B^tB$ 是半正定的. 因为 B 可逆, 所以 A 满秩. 于是, A 的正惯性指数等于 n. □

例 9.17 设 A 是正定矩阵. 证明 $\det(A)>0$ 且 A^{-1} 也正定.

证明. 由上述定理 *(ii)*, $A=P^tP$, 其中 $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A)=\det(P)^2>0$, 且

$$A^{-1}=(P^tP)^{-1}=P^{-1}\left(P^t\right)^{-1}=P^{-1}\left(P^{-1}\right)^t.$$

再由上述定理 *(ii)*, A^{-1} 正定. □

9.4 Jacobi 公式与正定矩阵

设 $A\in\mathrm{M}_n(F)$. 矩阵 A 的子式

$$M\begin{pmatrix} i_1,i_2,\ldots,i_k\\ i_1,i_2,\ldots,i_k\end{pmatrix},$$

其中 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$, 称为 A 的一个 k 阶主子式. 特别地,

$$M\begin{pmatrix} 1,2,\ldots,k\\ 1,2,\ldots,k\end{pmatrix}$$

称为 A 的 k 阶顺序主子式.

例 9.18 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的顺序主子式是 $a_{1,1}$, $\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ 和 $\det(A)$.

定理 9.19 *(Jacobi 公式)* 设 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$. 设 $\Delta_0 = 1$, Δ_i 是 A 的 i 阶顺序主子式. 如果 $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ 都非零, 则

$$A \sim_c \operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right).$$

证明. 设 $A = (a_{i,j})_{n\times n}$. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, $a_{1,1} = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\right)$. 结论成立. 设 $n > 1$ 且 $n-1$ 时结论成立. 设 B 是由 A 的前 $(n-1)$ 行和 $(n-1)$ 列元素组成的子矩阵. 则 B 对称且它的 $n-1$ 个顺序主子式是 $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$. 由归纳假设可知

$$B \sim_c \underbrace{\operatorname{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}\right)}_{C}.$$

于是存在 $P \in \mathrm{GL}_{n-1}(F)$ 使得 $P^t B P = C$. 令

$$Q = \begin{pmatrix} P & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

则

$$
\begin{aligned}
Q^tAQ &= \begin{pmatrix} P^t & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^t & a_{n,n} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{w} = P^t\mathbf{v}$. 对 Q^tAQ 用初等行伴列变换并注意到 C 对称, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} E_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ -\mathbf{w}^t\left(C^{-1}\right)^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^t & a_{n,n} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_{n-1} & -C^{-1}\mathbf{w} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}}_{R} \\
&= \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ O_{1\times(n-1)} & \lambda \end{pmatrix} R, \quad \text{其中 } \lambda \text{ 是 } F \text{ 中某个元素}, \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} C & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & \alpha \end{pmatrix}}_{M}, \quad \text{其中 } \alpha \text{ 是 } F \text{ 中某个元素}.
\end{aligned}
$$

最后, 我们来验证 $\alpha = \Delta_n/\Delta_{n-1}$. 由上述推导得出

$$C = P^tBP \quad \text{和} \quad M = R^tQ^tAQR.$$

因为 $\det(C) = \Delta_{n-1} = \det(B)$, 所以由上述第一个等式蕴含 $\det(P)^2 = 1$. 而上述第二个等式蕴含

$$\Delta_{n-1}\alpha = \Delta_n \det(P)^2 \implies \alpha = \Delta_n/\Delta_{n-1}. \quad \square$$

定理 9.20 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 设 Δ_k 是 A 的 k 阶顺序主子式, $k = 1, 2, \ldots, n$. 则下列命题等价.

(i) A 正定;

(ii) A 的任何 k 阶主子式都大于零;

(iii) $\Delta_1 > 0$, $\ldots$, $\Delta_n > 0$.

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 设 B 是由 A 中第 $i_1, \ldots, i_k$ 行和 $i_1, \ldots, i_k$ 列构成的子矩阵. 其中 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$. 令 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 对任意 $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, 第 j 个坐标等于零, 第 i_ℓ 个坐标等于 x_{i_ℓ}, $\ell = 1, 2, \ldots, k$. 再令 $\mathbf{y} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})^t$. 假设 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}_k$. 则 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$. 于是

$$0 < \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \mathbf{y}^t B \mathbf{y}.$$

由 $\mathbf{y}$ 的任意性可知, B 正定. 根据上例, $\det(B) > 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 显然.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) 由 Jacobi 公式,

$$A \sim_c \mathrm{diag}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right),$$

其中 $\Delta_0 = 1$. 于是 A 合同于一个对角矩阵, 其对角线上的元素都是正实数. 于是 A 的正惯性指数等于 n. □

例 9.21 设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

问 λ 为何值时 A 是正定的, A 是负定的?

解. A 的三个顺序主子式分别是

$$\Delta_1 = \lambda,\ \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2{-}1,\ \Delta_3 = \det(A) = (\lambda{-}1)^2(\lambda{+}2).$$

A 正定当且仅当 $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ 且 $\Delta_3 > 0$. 即 $\lambda > 1$.

A 负定当且仅当 $-A$ 正定. 而 $-A$ 的三个主子式是

$$\Omega_1 = -\lambda, \quad \Omega_2 = \lambda^2 - 1, \quad \Omega_3 = \det(A) = -(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

A 负定当且仅当 $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$ 且 $\Omega_3 > 0$. 即 $\lambda < -2$.

9.5 Hadamard 不等式

例 9.22 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明 $\det(A)$ 不大于 A 的对角线上元素之积.

证明. 设 $A = (a_{i,j})$. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, $A = (a_{1,1})$. 于是 $\det(A) = a_{1,1}$. 结论成立. 设 $n > 1$ 且 $n - 1$ 时结论成立. 把 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

由定理 *9.20 (i)* $\Longrightarrow$ *(ii)* 的证明可知, A_{n-1} 正定. 于是 $\det(A_{n-1}) \le a_{1,1}\cdots a_{n-1,n-1}$. 令

$$P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\mathbf{v} \\ O_{1\times(n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$P^tAP = \begin{pmatrix} A_{n-1} & O_{(n-1)\times 1} \\ O_{1\times(n-1)} & a_{n,n} - \underbrace{\mathbf{v}^t A_{n-1}^{-1}\mathbf{v}}_{\alpha} \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(P) = 1$, 所以上式两边取行列式得

$$\det(A) = \det(A_{n-1})(a_{n,n} - \alpha).$$

因为 A_{n-1} 正定, 所以 A_{n-1}^{-1} 正定*(*见例 *9.17)*. 于是 $\alpha \ge 0$. 由上式和归纳假设得

$$\det(A) \le a_{1,1}\cdots a_{n-1,n-1}a_{n,n}. \quad \square$$

例 9.23 *(Hadamard* 不等式*)* 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 证明*:*

$$|\det(A)| \le \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2} \quad 和 \quad |\det(A)| \le \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2}.$$

证明. 不妨设 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. 令 $M = A^tA$. 由定理 *9.16 (ii)* 可知 M 正定. 设 $M = (m_{i,j})$. 则由上例得到

$$\det(M) \le m_{1,1}\cdots m_{n,n}.$$

注意到

$$m_{i,i} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2.$$

所以

$$\det(A)^2 = \det(M) \leq \prod_{i=1}^{n} m_{i,i} = \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2.$$

由此证明了第二个不等式. 令 $M = AA^t$. 我们可以证明第一个不等式. □

10 二次曲线和曲面的仿射分类

10.1 仿射变换

在本小节中, F 是任意的域, V 是域 F 上的线性空间.

定义 10.1 设 $\phi : V \longrightarrow V$ 是线性(自)同构, $\mathbf{v} \in V$ 是一个固定的向量. 映射

$$\begin{aligned} \rho: \ V &\longrightarrow \quad V \\ \mathbf{x} &\mapsto \ \phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v} \end{aligned}$$

称为 V 上一个由 ϕ 和 $\mathbf{v}$ 定义的仿射变换 *(affine transformation)*, 其中 $\mathbf{v}$ 称为 ρ 的平移向量.

当 ϕ 是恒同映射是, ρ 称为平移变换 (translation).

命题 10.2 *(i) 设 ρ_1, ρ_2 是 V 上两个仿射变换. 则 $\rho_2 \circ \rho_1$ 也是仿射变换.*

(ii) 仿射变换可逆，且其逆也是仿射变换.

证明. (i) 设 ρ_i 由线性同构 ϕ_i 和平移向量 $\mathbf{v}_i$ 定义, $i = 1, 2$. 再设 $\mathbf{x} \in V$. 则

$$\rho_2 \circ \rho_1(\mathbf{x}) = \rho_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) = \phi_2(\phi_1(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2 = \phi_2 \circ \phi_1(\mathbf{x}) + \phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2.$$

于是 $\rho_2 \circ \rho_1$ 是由线性同构 $\phi_2 \circ \phi_1$ 和平移向量 $\phi_2(\mathbf{v}_1) + \mathbf{v}_2$ 定义的仿射变换.

(ii) 设 ρ 是由线性同构 ϕ 和平移向量 $\mathbf{v}$ 定义的仿射变换. 根据 (i) 的证明, 我们令 σ 是由 ϕ^{-1} 和 $-\phi^{-1}(\mathbf{v})$ 定义的仿射变换. 对任意的 $\mathbf{x} \in V$,

$$\sigma \circ \rho(\mathbf{x}) = \sigma(\phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = \phi^{-1}(\phi(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) - \phi^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{x} + \phi^{-1}(\mathbf{v}) - \phi^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbf{x}.$$

类似地,

$$\rho \circ \sigma(\mathbf{x}) = \rho(\phi^{-1}(\mathbf{x}) - \phi^{-1}(\mathbf{v})) = \phi(\phi^{-1}(\mathbf{x}) - \phi^{-1}(\mathbf{v})) + \mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{x}.$$

于是, $\rho^{-1} = \sigma$. $\square$

注解 10.3 上述命题说明 V 上的所有仿射变换关于 $\circ$ 构成群.

例 10.4 在这个例子中我们研究 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换. 在标准基下 $\mathbb{R}^n$ 中每个向量是由 n 个坐标的列向量, 每个线性同构对应一个唯一的可逆矩阵. 于是仿射变换 ρ 可以具体的表示为

$$\begin{aligned}\rho: \quad \mathbb{R}^n \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad &\mapsto \quad A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $v_1, \ldots, v_n$ 是固定的实数.

考虑函数 $f(x_1, \ldots, x_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. 在微积分中我们经常做变量替换把 f 变为另一种形式. 变量替换是一个从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的可逆映射

$$\begin{aligned}T: \quad \mathbb{R}^n \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad &\mapsto \quad \begin{pmatrix} y_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_n(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

仿射变换是一种特殊的变量替换. 利用变量替换化简函数

可以用下列交换图直观地表示

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{R},
\end{tikzcd}
$$

其中 $g = f \circ T(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_n))$. 我们对函数 g 的知识可以通过同构 $f = g \circ T^{-1}$ 转换到成关于 f 的知识. 当然我们可能需要经过多次变换替换才能达到目的. 此时交换图表示为

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "T_1 \circ \cdots \circ T_k"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{R}.
\end{tikzcd}
$$

10.2 二次曲面

引理 10.5 设 $p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 的次数等于 2, 其齐 2 次部分记为 h_2. 把 p 看成从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数, h_2 看成相应的二次型. 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换 ρ 使得

$$
\begin{aligned}
p \circ \rho : \quad \mathbb{R}^n \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad &\mapsto \quad \begin{array}{l} x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \\ -\lambda x_{k+\ell+1} - \mu, \end{array}
\end{aligned}
$$

其中 (k, ℓ) 是 h_2 的签名, $\lambda \in \{0, 1\}$ 且 $\mu \in \mathbb{R}$.

证明. 设 $p = h_2 + h_1 + h_0$ 是 p 的加法分解. 则

$$p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x} + h_1(\mathbf{x}) + h_0,$$

其中 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$. 由惯性定理(矩阵版)可知, 存在 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t A P = \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \tag{1}$$

. 设 $\rho_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 由公式 $\rho_1(\mathbf{x}) = P\mathbf{x}$ 给出. 则

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^t P^t A P\mathbf{x} + h_1(P\mathbf{x}) + h_0 \\ &\overset{(1)}{=} x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2 \\ &\quad + 2\alpha_1 x_1 + \cdots + 2\alpha_n x_n + h_0, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. 通过配方得

$$\begin{aligned} p \circ \rho_1(\mathbf{x}) = (x_1 + \alpha_1)^2 &+ \cdots + (x_k + \alpha_k)^2 \\ &- (x_{k+1} - \alpha_{k+1})^2 - \cdots - (x_{k+\ell} - \alpha_{k+\ell})^2 \\ &+ 2\alpha_{k+\ell+1} x_{k+\ell+1} + \cdots + 2\alpha_n x_n + \xi, \end{aligned}$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}$. 考虑平移变换

$$\begin{array}{cccc} \rho_2: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+\ell} \\ x_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1-\alpha_1 \\ \vdots \\ x_k-\alpha_k \\ x_{k+1}+\alpha_{k+1} \\ \vdots \\ x_{k+\ell}+\alpha_{k+\ell} \\ x_{k+\ell+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{array}$$

则

$$\begin{aligned} p\circ\rho_1\circ\rho_2(\mathbf{x}) = {} & x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2 \\ & +2\alpha_{k+\ell+1}x_{k+\ell+1}+\cdots+2\alpha_n x_n+\xi. \end{aligned}$$

情形 1. 当 $2\alpha_{k+\ell+1}x_{k+\ell+1}+\cdots+2\alpha_n x_n=0$ 时, 令 $\lambda=0$ 和 $\mu=-\xi$ 即可.

情形 2. 当 $2\alpha_{k+\ell+1}x_{k+\ell+1}+\cdots+2\alpha_n x_n\neq 0$ 时, 存在 $j\in\{k+\ell+1,k+\ell+2,\ldots,n\}$ 使得 $\alpha_j\neq 0$. 设 $m=n-(k+\ell)$. 考虑一个 m 阶可逆方阵 B, 其中 B 的第一行是 $(-2\alpha_{k+\ell+1},\ldots,-2\alpha_n)$, 其它行中的元素只有一个是 1 和其它都是 0. 特别地, 第 j 个元素一定是零. 这样的可逆矩阵

显然存在. 于是

$$C=\begin{pmatrix}E_{k+\ell} & O\\ O & B\end{pmatrix}$$

是 n 阶可逆矩阵. 则 $C\mathbf{x}$ 中的第 $k+\ell+1$ 个坐标等于 $-2\alpha_{k+\ell+1}x_{k+\ell+1}-\cdots-2\alpha_n x_n$. 令 $\rho_3:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 由公式 $\rho_3(\mathbf{x})=C^{-1}\mathbf{x}$ 给出. 则

$$p\circ\rho_1\circ\rho_2\circ\rho_3(\mathbf{x})=x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2-x_{k+\ell+1}+\xi. \tag{2}$$

令 $\lambda=1$ 和 $\mu=-\xi$ 即可. (上式的一个计算验证过程见注释 10.6). □

注解 10.6 等式 (2) 的具体验证过程如下. 设 $\mathbf{y}=\rho_3(\mathbf{x})$, 其中 $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^t$. 则

$$\begin{aligned}p\circ\rho_1\circ\rho_2(\mathbf{y})=y_1^2+\cdots+y_k^2-y_{k+1}^2-\cdots-y_{k+\ell}^2\\ +2\alpha_{k+\ell+1}y_{k+\ell+1}+\cdots+2\alpha_n y_n+\xi.\end{aligned}$$

注意到由 ρ_3 的定义可得:

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_{k+\ell}\end{pmatrix}=E_{k+\ell}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{k+\ell}\end{pmatrix}\quad\text{和}\quad\begin{pmatrix}y_{k+\ell+1}\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=B^{-1}\begin{pmatrix}x_{k+\ell+1}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}
p\circ\rho_1\circ\rho_2(\mathbf{x}) &= x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2\\
&\quad+(2\alpha_{k+\ell+1},\ldots,2\alpha_n)B^{-1}\begin{pmatrix}x_{k+\ell+1}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\xi\\
&= x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2\\
&\quad-\vec{B}_1B^{-1}\begin{pmatrix}x_{k+\ell+1}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\xi\\
&= x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2\\
&\quad-(1,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-k-\ell-1})\begin{pmatrix}x_{k+\ell+1}\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}+\xi\\
&= x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2-x_{k+\ell+1}+\xi.
\end{aligned}$$

验证完毕.

定理 10.7 [1] 设 $p\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ 的次数等于 2, 其齐 2 次部分记为 h_2. 把 p 看成从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数, h_2 看成相应的二次型. 设 $r=\mathrm{rank}(h_2)$ 和 k 是 h_2 的正惯性指数. 则存在

[1] 见柯斯特利金第二卷191页的推论.

$\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换 ρ 使得

$$
\begin{array}{rccc}
p\circ\rho: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_r^2-\mu,
\end{array}
$$

其中 $\mu\in\mathbb{R}$; 或存在 $\mathbb{R}^n$ 上的仿射变换 ρ 使得

$$
\begin{array}{rccc}
p\circ\rho: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_r^2-x_{r+1}
\end{array}
$$

且 $r<n$.

证明. 注意到 h_2 的负惯性指数等于 $r-k$. 当引理 10.5 中 $\lambda=0$ 时, 我们得到第一个函数. 否则 $\lambda=1$. 我们考虑平移 $x_i\mapsto x_i$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}\backslash\{r+1\}$, $x_{r+1}\mapsto x_{r+1}-\mu$ 即可. □