第一章　空间与形式

4.4　若干维数公式

引理 4.11 设 U 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U). \tag{1}$$

证明. 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是 U 的一组基. 由基扩充定理可知，存在 $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ 使得 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 下面我们来证明 $\mathbf{v}_{k+1} + U, \ldots, \mathbf{v}_n + U$ 是 V/U 的一组基. 首先, 设 $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1} + U) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{v}_n + U) = U.$$

则 $(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots \alpha_n\mathbf{v}_n) + U = U$. 即 $(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots \alpha_n\mathbf{v}_n) \in U$. 换言之, 存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ 使得

$$\begin{aligned}
&\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n \\
&= \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k \\
&\Longrightarrow \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k + (-\alpha_{k+1})\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + (-\alpha_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 线性无关, 所以

$$\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0.$$

于是, $\mathbf{v}_{k+1}+U,\dots,\mathbf{v}_n+U$ 线性无关. 再设 $\mathbf{v}+U\in V/U$, 其中 $\mathbf{v}\in V$. 则存在 $\beta_1,\dots,\beta_n\in V$ 使得

$$\mathbf{v}=\underbrace{\beta_1\mathbf{v}_1+\cdots+\beta_k\mathbf{v}_k}_{\mathbf{x}}+\underbrace{\beta_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+\beta_n\mathbf{v}_n}_{\mathbf{y}}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}+U&=\mathbf{x}+\mathbf{y}+U\\
&=(\mathbf{x}+U)+(\mathbf{y}+U) && \text{(商空间中的运算)}\\
&=U+(\mathbf{y}+U) && (\mathbf{x}\in U)\\
&=\mathbf{y}+U && (U\text{ 是 }V/U\text{ 中的零})\\
&=\beta_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1}+U)+\cdots+\beta_n(\mathbf{v}_n+U). && \text{(商空间中的运算)}
\end{aligned}$$

由此可知, $\mathbf{v}_{k+1}+U,\dots,\mathbf{v}_n+U$ 是 V/U 的一组基. 从而 $\dim(V/U)=n-k$. □

命题 4.12 *(i)* 设 U 是 V 的子空间, 则 $U\neq V$ 当且仅当 $\dim(U)<\dim(V)$.

(ii) 设 V_1,V_2 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

(iii) 设 $\phi:V\longrightarrow W$ 是线性映射. 则

$$\dim(\ker(\phi))+\dim(\operatorname{im}(\phi))=\dim(V).$$

证明. (i) (方法1) 见上学期第二章第二讲命题 2.14.

(方法2)

$$\dim(U) < \dim(V) \overset{(1)}{\iff} \dim(V/U) > 0 \iff V/U \neq \{U\} \iff U \subsetneq V.$$

(ii) (方法1) 见上学期第二章第二讲命题 2.15.

(方法2) 由上周讲义推论 3.5 和定理 4.10,

$$\begin{aligned}&\dim((V_1+V_2)/V_1) = \dim(V_2/(V_1 \cap V_2))\\ \overset{(1)}{\Longrightarrow}\ &\dim(V_1+V_2) - \dim(V_1) = \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2).\end{aligned}$$

(iii) (方法1) 见上学期第二章定理 5.14.

(方法2) 由线性映射基本定理(I)和定理 4.10,

$$\dim(V/\ker(\phi)) = \dim(\mathrm{im}(\phi)) \overset{(1)}{\Longrightarrow} \dim(V) - \dim(\ker(\phi)) = \dim(\mathrm{im}(\phi)).$$

例 4.13 设 $\dim(V) = n$, $f \in \mathrm{Hom}(V, F)$ 且 f 不是零映射. 证明: f 是满射且 $\dim(\ker(f)) = n-1$.

证明. 因为 $\mathrm{im}(f) \subset F$, 所以 $\dim(\mathrm{im}(f)) \leq \dim(F)$. 因为 f 不是零映射, 所以 $\mathrm{im}(f) \neq \{0\}$. 故 $\dim(\mathrm{im}(f)) > 0$. 由此和 $\dim(F) = 1$ 可知, $\dim(\mathrm{im}(f)) = 1$. 根据命题 *4.12 (i)*, $\mathrm{im}(f) = F$, 即 f 是满射. 再利用命题 *4.12 (iii)*, $\dim(\ker(f)) = n-1$. □

命题 4.14 设 $V_1, \ldots, V_k$ 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1 + \cdots + V_k) \leq \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_k).$$

等号成立当且仅当 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和.

证明. 我们对 k 归纳证明不等式. 当 $k=1$ 时不等式显然成立. 设 $k>1$ 且不等式对 $k-1$ 成立. 则

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) \quad (\text{命题 } 4.12\text{ (ii)})\\
&\le\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&\le\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). \quad (\text{归纳假设})
\end{aligned}$$

设 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和. 对 k 归纳. 当 $k=1$ 时显然. 设 $k>1$ 且 $k-1$ 时结论成立.

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&\quad-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) && (\text{命题 } 4.12\text{ (ii)})\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k) && (\text{定理 } 1.12\text{ (iii)})\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). && (\text{归纳假设})
\end{aligned}$$

反之, 设 $\dim(V_1+\cdots+V_k)=\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)$. 我们要证明 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和. 假设不是直和. 由定理 1.12 (iii), 存在 $i\in\{1,\ldots,k\}$ 使得

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_n)\neq\{\mathbf{0}\}.$$

不妨设 $i=1$. 则

$$
\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) \quad (\because \text{命题 } 4.12\ (\mathrm{ii}))\\
&<\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k) \quad (\because V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)\neq\{\mathbf{0}\})\\
&\leq\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). \quad (\because \text{刚证的不等式})
\end{aligned}
$$

矛盾. □

推论 4.15 设 $V_1,\ldots,V_k$ 是 V 的非平凡子空间, B_i 是 V_i 的基底, $i=1,\ldots,k$. 令 $U=V_1+\cdots+V_k$. 如果 U 是 $V_1,\ldots,V_k$ 的直和, 则 $B_1\cup\cdots\cup B_k$ 是 U 的一组基.

证明. 设 $B=B_1\cup\cdots\cup B_k$. 则 $U=\langle B\rangle$. 只要证 B 是线性无关集即可. 如果不是, 则存在 $\mathbf{v}\in B$ 使得 $\mathbf{v}$ 是 $B\setminus\{\mathbf{v}\}$ 中元素的线性组合. 故 $V=\langle B\setminus\{\mathbf{v}\}\rangle$. 从而

$$\dim(U)<\mathrm{card}(B).$$

我们有

$$\dim(U)\leq\sum_{i=1}^{k}\mathrm{card}(B_i)=\sum_{i=1}^{k}\dim(V_i),$$

与上述命题矛盾. □

4.5 利用线性映射的核证明矩阵秩的不等式

核方法基本步骤如下:

1. 把矩阵解释为坐标空间的线性映射;
2. 利用对偶定理 $\dim(\ker(\phi_A)) + \mathrm{rank}(A) = n$ 把秩转换为核的维数;
3. 利用核空间的包含关系和线性映射基本定理 (I), 构造线性单射;
4. 利用线性单射保持原像空间的维数证明不等式.

例 4.16 设 $A \in F^{m\times s}$ 和 $B \in F^{s\times n}$. 证明:

$$\mathrm{rank}(AB) \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - s.$$

证明. 设

$$\begin{array}{rccc} \phi_A: & F^s & \longrightarrow & F^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & A\mathbf{x} \end{array} \quad 和 \quad \begin{array}{rccc} \phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^s \\ & \mathbf{x} & \mapsto & B\mathbf{x}. \end{array}$$

则

$$\begin{array}{rccc} \phi_A \circ \phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & AB\mathbf{x}. \end{array}$$

故 $\phi_A \circ \phi_B = \phi_{AB}$.

设 $K_A=\ker(\phi_A)$, $K_B=\ker(\phi_B)$ 和 $K_{AB}=\ker(\phi_{AB})$. 令 $d_A=\dim(K_A)$, $d_B=\dim(K_B)$ 和 $d_{AB}=\dim(K_{AB})$. 则

$$d_A + \mathrm{rank}(A)=s,\quad d_B+\mathrm{rank}(B)=n,\quad d_{AB}+\mathrm{rank}(AB)=n.$$

故要证明的不等式等价于

$$n-d_{AB}\ge s-d_A+n-d_B-s \iff d_A+d_B\ge d_{AB}.$$

注意到 $K_B\subset K_{AB}\subset F^n$. 定义:

$$\begin{aligned}\rho:\ K_{AB} &\longrightarrow K_A\\ \mathbf{x} &\mapsto B\mathbf{x}.\end{aligned}$$

注意到 $AB\mathbf{x}=\mathbf{0}_m$ 蕴含 $B\mathbf{x}\in K_A$. 故上述线性映射是良定义的. 显然 $K_B=\ker(\rho)$. 根据线性映射基本定理 I, 存在线性单射 $\bar\rho: K_{AB}/K_B\longrightarrow K_A$.

因为 $\bar\rho$ 是单射, 所以

$$\dim(K_{AB}/K_B)=\dim(\mathrm{im}(\bar\rho))\le d_A.$$

根据引理 4.11, $d_{AB}-d_B\le d_A\Longrightarrow d_{AB}\le d_A+d_B$. $\square$

例 4.17 设 $A,B\in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $AB=BA$. 证明:

$$\mathrm{rank}(A+B)+\mathrm{rank}(AB)\le \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B).$$

证明. 设

$$\begin{aligned}\phi_A:\ F^n &\longrightarrow F^n\\ \mathbf{x} &\mapsto A\mathbf{x}\end{aligned} \quad 和 \quad \begin{aligned}\phi_B:\ F^n &\longrightarrow F^n\\ \mathbf{x} &\mapsto B\mathbf{x}.\end{aligned}$$

则

$$\begin{array}{rccc} \phi_A\circ\phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & AB\mathbf{x}. \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \phi_A+\phi_B: & F^n & \longrightarrow & F^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & (A+B)\mathbf{x}. \end{array}$$

故 $\phi_A\circ\phi_B=\phi_{AB}$ 且 $\phi_A+\phi_B=\phi_{A+B}$.

设 $K_A=\ker(\phi_A)$, $K_B=\ker(\phi_B)$, $K_{AB}=\ker(\phi_{AB})$ 和 $K_{A+B}=\ker(\phi_{A+B})$. 令 $d_A=\dim(K_A)$, $d_B=\dim(K_B)$, $d_{AB}=\dim(K_{AB})$ 和 $d_{A+B}=\dim(K_{A+B})$. 则

$$d_A+\mathrm{rank}(A)=d_B+\mathrm{rank}(B)=d_{AB}+\mathrm{rank}(AB)=d_{A+B}+\mathrm{rank}(A+B)=n.$$

故要证明的不等式等价于

$$n-d_{A+B}+n-d_{AB}\le n-d_A+n-d_B \iff d_A+d_B\le d_{A+B}+d_{AB}.$$

由上例的推理可知: $K_B\subset K_{AB}$. 因为 $AB=BA$, 所以 $K_{AB}=K_{BA}$. 故 $K_A\subset K_{AB}$. 于是

$$K_A+K_B\subset K_{AB} \implies \dim(K_A+K_B)\le d_{AB}.$$

再根据维数公式

$$d_A+d_B-\dim(K_A\cap K_B)\le d_{AB} \implies d_A+d_B\le d_{AB}+\dim(K_A\cap K_B).$$

于是, 只要证明 $\dim(K_A\cap K_B)\le d_{A+B}$. 可直接验证

$$K_A\cap K_B\subset K_{A+B}.$$

故最后一个不等式显然成立. □

从矩阵

$$M=\begin{pmatrix} A & O & O \\ O & B & O \end{pmatrix}$$

出发, 上述不等式可以矩阵分块证明. 详见

`http://www.mmrc.iss.ac.cn/~zmli/LinearAlgebra-2022-2023/LectureNotes/LB1-3.pdf` 第3页.

5 坐标变换

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

定义 5.1 设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 对任意的 $\mathbf{x}\in V$, 存在唯一的 $x_1,\ldots,x_n\in F$ 使得

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{v}_1+\cdots+x_n\mathbf{v}_n=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

称 $(x_1,\ldots,x_n)^t$ 是 $\mathbf{x}$ 在基底 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的坐标.

坐标的存在唯一性由 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 的线性无关性可得.

例 5.2 在 $\mathbb{Q}^3$ 中: 设

$$\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \mathbf{v}_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) 证明*:* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是 $V := \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ 的一组基.

(ii) 令 $\mathbf{w} = (3, 2, 2)^t$, 判断 $\mathbf{w}$ 是否在 V 中. 如果在计算 $\mathbf{w}$ *(*做为 V 中的向量*)*在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 的下的坐标.

解. *(i)* 设 $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. 则

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\operatorname{rank}(A) = 2$, 所以 $\dim(V) = 2$. 因为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 线性无关, 所以 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是 V 的一组基.

(ii) 设 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Q}$ 使得 $\mathbf{w} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2$. 则

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ 2\alpha_2 = 2 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2.$$

故 $\mathbf{w} \in V$ 且它在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标是 $(1, 2)$. 换言之,

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

定理 5.3 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n \in V$. 则 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基当且仅当存在唯一的 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P. \tag{2}$$

(称 P 是从基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 到基底 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 的转换矩阵).

证明. 设 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 (2) 成立. 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_1 \mathbf{e}'_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}'_n = \mathbf{0}.$$

则

$$(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 线性无关, 所以

$$P \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

因为 P 满秩, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. 于是 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 线性无关. 因为 $\dim(V) = n$, 所以 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基.

反之, 设 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基. 因为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, 所以存在 $P \in \mathrm{M}_n(F)$ 使得 (2) 成立. 我们首先证明 P 可逆. 否则, P 不满秩, 从而存在 $\beta_1, \ldots, \beta_n \in F$, 不全为零, 使得

$$P \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由 (2),

$$\beta_1\mathbf{e}_1'+\cdots+\beta_n\mathbf{e}_n'=\mathbf{0},$$

即 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 线性相关. 矛盾. 于是 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$. 再设 $Q\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n')=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)Q.$$

则 $(\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0})=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)(P-Q)$. 由 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 的线性无关性可知 $P-Q=O$, 即 $P=Q$. 唯一性成立. □

定理 5.4 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 是 V 的两组基, P 从第一组基到第二组的转换矩阵. 设 $\mathbf{x}\in V$ 在这两组基下的坐标分别是 $(x_1,\ldots,x_n)^t$ 和 $(x_1',\ldots,,x_n')^t$. 则

$$\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

证明. 我们计算

$$\mathbf{x}=(\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n')\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性可知

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}\implies\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.\quad\square$$

例 5.5 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基. 证明

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

也是一组基. 设 $\mathbf{x} = (5,1)^t$. 求 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标.

证明. 通过矩阵表示, 我们有

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P}.$$

因为 A 可逆, 所以由定理 *5.3* 可知, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是基. 计算得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

再根据定理 *5.4*, $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标是

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 5.6 判断 $p_1 = x(x-1), p_2 = x(x-2), p_3 = x(x-2)+1$ 在 $F[x]^{(3)}$ 中 是不是一组基.

解. 因为 $p_1 = x^2 - x$, $p_2 = x^2 - 2x$, $p_3 = x^2 - 2x + 1$, 所以

$$(p_1, p_2, p_3) = (1, x, x^2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}.$$

因为 $\det(P) = 1 \neq 0$, 所以 A 可逆. 由定理 *5.3*, p_1, p_2, p_3 是一组基.

6 对偶空间简介

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

线性空间 $\mathrm{Hom}(V, F)$ 称为 V 的对偶空间, 记为 V^*. 换言之, V^* 是 V 上所有线性函数的集合, 其中的加法和数乘由 $\mathrm{Map}(V, F)$ 给出.

定理 6.1 *设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 则在 V^* 中存在唯一的一组基 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 满足 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 特别地, $\dim(V^*)$=n. ($\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 称为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 的对偶基.)*

证明. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 设 $\mathbf{e}_i^* \in V^*$ 满足 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 由线性映射基本定理 II 可知这样的 $\mathbf{e}_i^*$ 存在且唯一. 我们只要证明 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 是 V^* 的基即可.

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得 $\alpha_1 \mathbf{e}_1^* + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n^* = \mathbf{0}^*$, 其中 $\mathbf{0}^*$ 代表 V^* 中的零元, 即零函数. 设 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 则

$$0 = \mathbf{0}^*(\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i^* \right) (\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j.$$

于是 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, 即 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 线性无关.

再设 $f \in V^*$ 且 $f(\mathbf{e}_j) = \beta_j, j = 1, 2, \ldots, n$. 令

$$g = \beta_1 \mathbf{e}_1^* + \cdots + \beta_n \mathbf{e}_n^*.$$

则对于任意 $j \in \{1.2. \ldots, n\}$, 我们有

$$g(\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i^*\right)(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \delta_{i,j} = \beta_j.$$

再由线性映射基本定理 II 中的唯一性可知, $f = g$. □

例 6.2 对偶基为取坐标提供方便. 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. 证明: 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i = \mathbf{e}_i^*(\mathbf{x})$.

证明. 我们计算

$$\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \delta_{i,j} = x_i. \quad \square$$

由此我们可以得出 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = 0$ 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 成立.

引理 6.3 设 $f_1, \ldots, f_n$ 是 V^* 的一组基, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 当且仅当 $f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{y})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

证明. 设 $\mathbf{z} \in V$. 只要证明:

$$\mathbf{z} = \mathbf{0} \iff f_1(\mathbf{z}) = \cdots = f_n(\mathbf{z}) = \mathbf{0}.$$

"$\Longrightarrow$" 是显然的.

"$\Longleftarrow$". 假设 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. 由线性映射基本定理 II 可知, 存在 $f \in V^*$ 使得 $f(\mathbf{z}) = 1$. 因为 $f_1, \ldots, f_n$ 是 V^* 的基底, 所以存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得 $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. 于是, $f(\mathbf{z}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right)(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. 矛盾. □

定理 6.4 下列映射

$$\begin{aligned}\phi:\ V &\longrightarrow V^{**}\\ \mathbf{v} &\mapsto \epsilon_{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

是线性同构, 其中

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mathbf{v}}:\ V^{*} &\longrightarrow F\\ f &\mapsto f(\mathbf{v}).\end{aligned}$$

证明. 先验证 $\epsilon_{\mathbf{v}} \in V^{**}$. 设 $\alpha, \beta \in F$, $f, g \in V^{*}$. 则

$$\epsilon_{\mathbf{v}}(\alpha f+\beta g) = (\alpha f+\beta g)(\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})+\beta g(\mathbf{v}) = \alpha\epsilon_{\mathbf{v}}(f)+\beta\epsilon_{\mathbf{v}}(g).$$

验证完毕. 于是 ϕ 是良定义的.

再验证 ϕ 是线性的. 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\alpha, \beta \in F$. 则对任意的 $f \in V^{*}$,

$$\epsilon_{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}}(f) = f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u})+\beta f(\mathbf{v}) = \alpha\epsilon_{\mathbf{u}}(f)+\beta\epsilon_{\mathbf{v}}(f).$$

于是 $\epsilon_{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}} = \alpha\epsilon_{\mathbf{u}} + \beta\epsilon_{\mathbf{v}}$, 即 $\phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v})$.

最后, 我们验证 ϕ 时双射. 由定理 6.1 可知, $\dim(V^{**})=n$. 因为 $\mathrm{im}(\phi) \subset V^{**}$ 且 $\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$. 我们只要验证 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}\}$ 即可. 设 $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}^{**}$, 其中 $\mathbf{0}^{**}$ 代表 V^{**} 中的零元. 则对任意的 $f \in V^{*}$, $f(\mathbf{v}) = 0$. 由引理 6.3 可知, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. □

上述定理中的线性同构 ϕ 的定义与基底无关, 此时我们说 V 与 V^{**} 自然同构.