# 第一章　空间与形式

## 1.3　子空间

**符号约定.** 在本小节和以后的各小节中 $V$ 是域 $F$ 上的线性空间.

**定义 1.15** 设 $W$ 是 $V$ 的非空子集. 如果对于任意的 $\alpha,\beta\in F$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in W$, 我们有 $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\in W$, 则称 $W$ 是 $V$ 的子空间.

每个子空间都是线性空间.

**例 1.16** *(i)* 设 $\phi: F^n \longrightarrow F^m$ 是线性映射. 则 $\ker(\phi)$ 是 $F^n$ 的子空间, $\operatorname{im}(\phi)$ 是 $F^m$ 的子空间.

*(ii)* 设 $\mathrm{SM}_n(F)$ 是 $F$ 上所有 $n$ 阶对称方阵的集合, $\mathrm{SSM}_n(F)$ 是 $F$ 上所有 $n$ 阶斜对称方阵的集合. 则它们都是 $\mathrm{M}_n(F)$ 上的子空间.

验证如下: 设 $A,B\in\mathrm{SM}_n(F),\alpha,\beta\in F$. 我们有

$$(\alpha A+\beta B)^t=\alpha A^t+\beta B^t=\alpha A+\beta B \implies \alpha A+\beta B\in\mathrm{SM}_n(F).$$

斜对称情形类似.

*(iii)* 设 $F[x]^{(d)}=\{p\in F[x] \mid \deg(p)<d\}$. 则 $F[x]^{(d)}$ 是 $F[x]$ 的子空间.

*(iv)* 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数的集合 $C[a,b]$ 和连续可微函数的集合 $C^1[a,b]$ 是 $\mathrm{Map}([a,b],\mathbb{R})$ 的子空间.

线性空间 $V$ 中的任意个子空间的交仍是子空间, 其证明与上学期第二章第一讲命题 1.19 类似. 设 $V_1,\ldots,V_k$ 是 $V$ 的子空间, 定义

$$V_1+V_2+\cdots+V_k=\{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\cdots+\mathbf{v}_k \mid \mathbf{v}_1\in V_1,\mathbf{v}_2\in V_2,\ldots,\mathbf{v}_k\in V_k\}.$$

则 $V_1+V_2+\cdots+V_k$ 是子空间. 称之为 $V_1,\ldots,V_k$ 的和. 验证见上学期第二章.

## 1.4 子空间的直和

**定义 1.17** 设 $V_1,\ldots,V_k$ 是 $V$ 的子空间, $W=V_1+\cdots+V_k$. 如果对于任意 $\mathbf{w}\in W$ 存在唯一的 $\mathbf{v}_1\in V_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in V_k$ 使得

$$\mathbf{w}=\mathbf{v}_1+\cdots+\mathbf{v}_k.$$

则称 $W$ 是 $V_1$, $\ldots$, $V_k$ 的直和, 并记为

$$W=V_1\oplus\cdots\oplus V_k.$$

**定理 1.18** 设 $V$ 是线性空间, $V_1,\ldots,V_k$ 是 $V$ 的子空间, 且 $W=V_1+\cdots+V_k$. 则以下结论等价.

*(i)* $W$ 是 $V_1$, $\ldots$, $V_k$ 的直和;

*(ii)* 如果 $\mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}_1 \in V_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V_k$, 则 $\mathbf{v}_1 = \cdots = \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.

*(iii)* 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

$$V_i \cap (V_1 + \cdots + V_{i-1} + V_{i+1} + \cdots + V_k) = \{\mathbf{0}\}.$$

**证明.** (i) $\Longrightarrow$ (ii). 显然.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). 不妨设 $i = 1$. 设 $\mathbf{w} \in V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k)$. 则存在 $\mathbf{v}_2 \in V_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in V_k$ 使得 $\mathbf{w} = \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k$. 于是

$$\mathbf{0} = -\mathbf{w} + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k.$$

由 $-\mathbf{w} \in V_1$ 和 (ii) 可知, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i). 设 $\mathbf{w} \in W$, 且

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \cdots + \mathbf{u}_k = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k,$$

其中 $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1 \in V_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k \in V_k$. 则 $\mathbf{0} = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) + \cdots + (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k)$. 于是

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1) = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2) + \cdots + (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k).$$

由此得出, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}_1 \in V_1 \cap (V_2 + \cdots + V_k)$. 根据 (iii), $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$. 类似地可得 $\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i$, $i = 2, \ldots, k$. $\square$

**例 1.19** 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基. 则

$$\mathbb{R}^n = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{v}_n \rangle.$$

这是因为 $\mathbb{R}^n$ 中的元素都是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的线性组合而且 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 线性无关.

**例 1.20** 设 $F$ 是特征不等于 *2* 的域. 证明:

$$\mathrm{M}_n(F) = \mathrm{SM}_n(F) \oplus \mathrm{SSM}_n(F).$$

**证明.** 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 令

$$B = \frac{1}{2}(A + A^t) \quad 和 \quad C = \frac{1}{2}(A - A^t).$$

因为 $2 \neq 0$, 所以 $B$ 和 $C$ 是良定义的. 可直接验证

$$B \in \mathrm{SM}_n(F),\ C \in \mathrm{SSM}_n(F),\ 且\ A = B + C.$$

于是, $\mathrm{M}_n(F) = \mathrm{SM}_n(F) + \mathrm{SSM}_n(F)$. 若 $A \in \mathrm{SM}_n(F) \cap \mathrm{SSM}_n(F)$, 则 $A = A^t = -A^t$. 于是, $2A^t = O$. 因为 $2$ 可逆, 所以 $A = O$, 即这两个子空间交平凡. 由定理 *1.18 (iii)*, $\mathrm{M}_n(F) = \mathrm{SM}_n(F) \oplus \mathrm{SSM}_n(F)$. □

当 $F$ 的特征等于 $2$ 时, $1 = -1$. 于是,

$$\mathrm{SM}_n(F) = \mathrm{SSM}_n(F).$$

故 $\mathrm{SM}_n(F) \cap \mathrm{SSM}_n(F) \neq \{O\}$. 这两个子空间之和不是直和.

**例 1.21** 设 $V$ 是线性空间, $V_1, \ldots, V_k$ 是 $V$ 的子空间. 如果 $V_1 + \cdots + V_k$ 是直和, 则对任意的 $\ell \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $V_1 + \cdots + V_\ell$ 也是直和.

**证明.** 设 $\mathbf{v}_1 \in V_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in V_\ell$ 使得 $\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_\ell = \mathbf{0}$. 则

$$\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_\ell + \underbrace{\mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0}}_{k-\ell} = \mathbf{0}.$$

将定理 *1.18 (ii)* 用于 $V_1, \ldots, V_\ell, \ldots, V_k$ 可知, $\mathbf{v}_1 = \cdots = \mathbf{v}_\ell = \mathbf{0}$. 再将定理 *1.18 (ii)* 用于 $V_1, \ldots, V_\ell$ 得到, $V_1 + \cdots + V_\ell$ 也是直和. $\square$

**例 1.22** 设

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

则 $\langle \mathbf{v}_1 \rangle \cap \langle \mathbf{v}_2 \rangle = \{\mathbf{0}\}$, $\langle \mathbf{v}_1 \rangle \cap \langle \mathbf{v}_3 \rangle = \{\mathbf{0}\}$ 且 $\langle \mathbf{v}_3 \rangle \cap \langle \mathbf{v}_1 \rangle = \{\mathbf{0}\}$. 但 $\langle \mathbf{v}_3 \rangle \cap (\langle \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_2 \rangle) = \langle \mathbf{v}_3 \rangle$. 于是 $\langle \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_2 \rangle + \langle \mathbf{v}_3 \rangle$ 不是直和.

**例 1.23** 设 $P^{(d)} := \{f \in F[x_1, \ldots, x_n] | \deg(f) \leq d\}$ 和 $H_i = \{h \in F[x_1, \ldots, x_n] | h \text{ 齐 } i \text{ 次}\}$. 根据多元多项式的齐次加法分解,

$$P^{(d)} := \bigoplus_{i=0}^{d} H_i.$$

## 1.5 子空间的生成元

设 $S$ 是 $V$ 的非空子集. 令 $\langle S\rangle$ 是 $S$ 中的元素的所有在 $F$ 上的线性组合的集合, 即

$$\langle S\rangle := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i \,|\, k \in \mathbb{Z}^+, \alpha_i \in F, \mathbf{v}_i \in S \right\}.$$

可验证 $\langle S\rangle$ 是一个子空间(上学期第二章第二讲命题 1.26). 称 $\langle S\rangle$ 为由 $S$ 生成的子空间, $S$ 称为 $\langle S\rangle$ 的一组生成元.

设 $U$ 是 $V$ 的子空间. 如果存在有限集 $S \subset V$ 使得 $U = \langle S\rangle$, 则称 $U$ 是在 $F$ 上有限生成的子空间.

**例 1.24** 设 $V = F[x]$. 则 $V$ 不是有限生成的.

**证明.** 假设 $F[x]$ 可以由 $p_1, \ldots, p_\ell \in F[x]$ 生成. 则 $1, x, \ldots, x^\ell$ 都是 $p_1, \ldots, p_\ell$ 在 $F$ 上的线性组合. 由线性组合引理可知, $1, x, \ldots, x^\ell$ 在 $F$ 上线性相关. 矛盾.

# 2 线性映射

**符号约定.** 在本节中 $V, W$ 是域 $F$ 上的两个线性空间. 它们中的零向量分别记为 $\mathbf{0}_V$ 和 $\mathbf{0}_W$.

## 2.1 定义与例子

**定义 2.1** 设 $\phi : V \longrightarrow W$. 如果对任意的 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 都有 $\phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v})$, 则称 $\phi$ 是从 $V$ 到 $W$

的线性映射.

上学期讲的关于线性映射的性质对抽象的线性映射仍成立. 特别地, 线性映射的核和像都是子空间.

**命题 2.2** 设 $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性映射. 则 $\phi$ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_V\}$.

**证明.** 见上学期第二章第三讲命题 5.11. □

**例 2.3** 以下线性映射是常用的.

$$\text{零映射}: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{0}_W. \end{array} \qquad \text{恒同映射}: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & V \\ \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v} \end{array}.$$

设 $V$ 是 $W$ 的子空间.

$$\text{嵌入映射}: \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v}. \end{array}.$$

设 $\phi$ 是从 $V$ 到 $W$ 的线性映射, $U$ 是 $V$ 的子空间. 则限制映射:

$$\begin{array}{cccc} \phi_U & U & \longrightarrow & W \\ & \mathbf{u} & \mapsto & \phi(\mathbf{u}) \end{array}$$

也是线性映射.

**例 2.4** 设 $V = F^n$ 和 $W = F^m$. 则 $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性映射当且仅当存在 $A \in F^{m \times n}$ 使得

$$\phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \text{其中 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots, \\ x_n \end{pmatrix}.$$

**例 2.5** 设 $V = \mathrm{M}_n(F)$ 和 $W = F$. 令

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{tr}: & \mathrm{M}_n(F) & \longrightarrow & F \\ & A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$$

是线性映射. 验证如下. 设

$$\alpha, \beta \in F, \quad A = (a_{i,j})_{n\times n}, \quad B = (b_{i,j})_{n\times n},$$

其中 $a_{i,j}, b_{i,j} \in F$. 则 $\alpha A + \beta B = (\alpha a_{i,j} + \beta b_{i,j})$. 于是,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha a_{i,i} + \beta b_{i,i}) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \beta \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \\ &= \alpha \mathrm{tr}(A) + \beta \mathrm{tr}(B). \end{aligned}$$

于是, tr 是线性的. 但 $\det : \mathrm{M}_n(F) \longrightarrow F$ 不是线性的.

**例 2.6** 设 $V = F[x]$ 和 $h \in F[x] \setminus \{0\}$. 令

$$\begin{array}{rccc} \phi_h: & F[x] & \longrightarrow & F[x] \\ & f & \mapsto & \mathrm{rem}(f, h, x). \end{array}$$

是线性映射. 验证如下. 设 $\alpha, \beta \in F$, $f, g \in F[x]$. 由多项式除法可知, 存在 $p, q \in F[x]$ 使得

$$f = ph + \phi_h(f) \quad \text{和} \quad g = qh + \phi_h(g).$$

于是 $\alpha f + \beta g = (\alpha p + \beta q)h + \alpha\phi_h(f) + \beta\phi_h(g)$. 因为 $\deg(\phi_h(f)) < \deg(h)$ 和 $\deg(\phi_h(g)) < \deg(h)$, 所以 $\deg(\alpha\phi_h(f) + \beta\phi_h(g)) < \deg(h)$. 由余式的唯一性可知

$$\phi_h(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi_h(f) + \beta\phi_h(g).$$

根据多项式的除法, 我们有

$$\ker(\phi_h) = \{f \in F[x] \mid h|f\} \quad \text{和} \quad \mathrm{im}(\phi_h) = F[x]^{(\deg(h))}.$$

**例 2.7** 设 $F = \mathbb{R}$, $V = C^1[a,b]$ 和 $W = C[a,b]$. 则求导 $d/dx$ 是从 $V$ 到 $W$ 的线性映射, 而变上限积分

$$\begin{array}{rccc} \int_a^x: & W & \longrightarrow & V \\ & f(t) & \mapsto & \int_a^x f(t)\,dt \end{array}$$

是线性映射. 直接计算得

$$\ker\left(\frac{d}{dx}\right) = \mathbb{R},\ \mathrm{im}\left(\frac{d}{dx}\right) = C[a,b]$$

和

$$\ker\left(\int_a^x\right) = \{0\},\ \mathrm{im}\left(\int_a^x\right) = \{f \in C^1[a,b] | f(a) = 0\}.$$

## 2.2 线性映射的运算

令 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 是从 $V$ 到 $W$ 的所有线性映射的集合. 它是 $\mathrm{Map}(V,W)$ 的子集. 可直接验证, 对任意的 $\alpha,\beta\in F$, $\phi,\psi\in\mathrm{Hom}(V,W)$, 我们有 $\alpha\phi+\beta\psi\in\mathrm{Hom}(V,W)$ (见上学期第二章第四讲命题6.11). 于是, $\mathrm{Hom}(V,W)$ 是 $\mathrm{Map}(V,W)$ 的子空间, 故它也是 $F$ 上的线性空间. 再设 $U$ 是另一个 $F$ 上的线性空间. 设 $\phi\in\mathrm{Hom}(U,V)$ 和 $\psi\in\mathrm{Hom}(V,W)$. 则 $\psi\circ\phi\in\mathrm{Hom}(U,W)$. 验证见上学期第二章第四讲命题6.15.

**例 2.8** *考虑上一讲例 2.7 中的两个映射. 我们有*

$$\int_a^x\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)dt=f(x)-f(a)\quad\text{和}\quad\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)=f(x).$$

**命题 2.9** *设 $\phi\in\mathrm{Hom}(V,W)$ 是双射. 则 $\phi^{-1}\in\mathrm{Hom}(W,V)$.*

**证明.** 设 $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\in W$, $\mathbf{v}_1=\phi^{-1}(\mathbf{w}_1)$ 和 $\mathbf{v}_2=\phi^{-1}(\mathbf{w}_2)$. 对任意的 $\alpha_1,\alpha_2\in F$,

$$\phi(\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2)=\alpha_1\phi(\mathbf{v}_1)+\alpha_2\phi(\mathbf{v}_2)=\alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2.$$

于是

$$\phi^{-1}(\alpha_1\mathbf{w}_1+\alpha_2\mathbf{w}_2)=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2=\alpha_1\phi^{-1}(\mathbf{w}_1)+\alpha_2\phi^{-1}(\mathbf{w}_2).\quad\square$$

**定义 2.10** *如果存在双射 $\phi\in\mathrm{Hom}(V,W)$, 则称 $V$ 和 $W$ 线性同构.*

线性同构是等价关系, 其验证过程与验证群同构是等价关系类似 (见上学期第四章第一讲第 15 页).

**例 2.11** *线性空间* $\mathrm{Hom}(F^n, F^m)$ *与* $F^{m\times n}$ *线性同构. 设*

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \mathrm{Hom}(F^n, F^m) & \longrightarrow & F^{n\times m} \\ & \phi & \mapsto & A_\phi \quad (\phi \text{ 在标准基下的矩阵}) \end{array}$$

*则* $\Phi$ *是双射. 具体验证见上学期第二章第四讲推论 6.14. 于是,* $\Phi$ *是线性同构.*

# 3 商空间

在本节中 $V$ 是域 $F$ 上的线性空间.

## 3.1 商空间

设 $U$ 是 $V$ 的子空间. 我们在 $V$ 上定义如下等价关系.

**定义 3.1** *设* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$*. 如果* $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U$*, 则称* $\mathbf{x}$ *和* $\mathbf{y}$ *关于* $U$ *等价. 记为* $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$*.*

我们验证 $\sim_U$ 是等价关系. 首先, $\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{0} \in U$. 于是对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{x}$. 自反性成立. 设 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U$. 于是 $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in U$. 从而 $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{x}$. 对称性成立. 设 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{y}$, $\mathbf{y} \sim_U \mathbf{z}$. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{z} \in U$. 于是

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{z} \in U.$$

于是 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{z}$. 传递性成立.

**引理 3.2** 设 $\mathbf{x} \in V$ 且 $[\mathbf{x}]$ 是 $\mathbf{x}$ 所在的等价类. 则

$$[\mathbf{x}] = \mathbf{x} + U.$$

**证明.** 设 $\mathbf{u} \in U$. 则 $\mathbf{x} \sim_U \mathbf{x} + \mathbf{u}$. 于是 $\mathbf{x} + \mathbf{u} \in [\mathbf{x}]$. 由此可知, $\mathbf{x} + U \subset [\mathbf{x}]$. 再设 $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}]$. 则 $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in U$, 即存在 $\mathbf{u} \in U$ 使得 $\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{u}$, 即 $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{x} + U$. 由此可知, $[\mathbf{x}] \subset \mathbf{x} + U$. □

由上述引理可知

$$V/\sim_U = \{\mathbf{v} + U \mid \mathbf{v} \in V\}.$$

为了化简符号, 我们用 $V/U$ 记 $V/\sim_U$. 与剩余环类似, $V$ 上的加法和数乘可诱导出 $V/U$ 中的线性运算.

设 $\mathbf{x} + U, \mathbf{y} + U \in V/U$ 和 $\alpha \in F$. 定义:

$$(\mathbf{x}+U)+(\mathbf{y}+U) = (\mathbf{x}+\mathbf{y})+U \quad \text{和} \quad \alpha(\mathbf{x}+U) = (\alpha\mathbf{x})+U.$$

下面我们来验证这两个运算的良定义. 设 $\mathbf{x} + U = \mathbf{x}' + U$ 和 $\mathbf{y} + U = \mathbf{y}' + U$. 则 $\mathbf{x} - \mathbf{x}', \mathbf{y} - \mathbf{y}' \in U$. 于是

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + (\mathbf{y} - \mathbf{y}') = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - (\mathbf{x}' + \mathbf{y}') \in U& \\ \implies (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \sim_U (\mathbf{x}' + \mathbf{y}')& \\ \implies (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + U = (\mathbf{x}' + \mathbf{y}') + U.&\end{aligned}$$

类似地, 对 $\alpha \in F$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in U &\Longrightarrow \alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}' \in U \\ &\Longrightarrow \alpha\mathbf{x} \sim_U \alpha\mathbf{x}' \\ &\Longrightarrow (\alpha\mathbf{x}) + U = (\alpha\mathbf{x}') + U. \end{aligned}$$

由 $V$ 中的运算规律可知, $V/U$ 是域 $F$ 上的线性空间, 其中的"零向量" 是 $\mathbf{0} + U = U$. 我们称 $V/U$ 是 $V$ 关于 $U$ 的商空间.

## 3.2 自然的线性映射

设 $\pi_U : V \longrightarrow V/U$ 是自然投射, 即对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $\pi_U(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + U$ (见上学期第一章讲义三第 12 页). 下面我们来验证 $\pi_U$ 是线性的. 对任意 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\begin{aligned} \pi_U(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) + U && (\pi_U \text{ 的定义}) \\ &= ((\alpha\mathbf{x}) + U) + ((\beta\mathbf{y}) + U) && (V/U \text{ 中加法的定义}) \\ &= \alpha(\mathbf{x} + U) + \beta(\mathbf{y} + U) && (V/U \text{ 中数乘的定义}) \\ &= \alpha\pi_U(\mathbf{x}) + \beta\pi_U(\mathbf{y}) && (\pi_U \text{ 的定义}). \end{aligned}$$

验证完毕.

设 $\phi : V \longrightarrow W$ 是从 $V$ 到 $F$ 上的线性空间 $W$ 的线性映射. 则对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{y}) \iff \phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{0} \iff \mathbf{x}-\mathbf{y} \in \ker(\phi) \iff \mathbf{x} \sim_{\ker(\phi)} \mathbf{y}.$$

由上学期第一章讲义三第 12 页定理 3.1 可知存在唯一的单射 $\bar{\phi}: V/\ker(\phi) \longrightarrow W$ 使得 $\phi = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}$. 即下述图表交换.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_{\ker(\phi)}"'] & W \\ V/\ker(\phi) \arrow[ur, "\bar{\phi}"] & \end{tikzcd}$$

交换. 特别有 $\mathrm{im}(\phi) = \mathrm{im}(\bar{\phi})$. 设 $\mathbf{x} + \ker(\phi) \in V/\ker(\phi)$. 则

$$\phi(\mathbf{x}) = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}(\mathbf{x}) = \bar{\phi}(\mathbf{x} + \ker(\phi)).$$

于是

$$\begin{array}{rccc} \bar{\phi}: & V/\ker(\phi) & \longrightarrow & W \\ & \mathbf{x} + \ker(\phi) & \mapsto & \phi(\mathbf{x}). \end{array}$$

**定理 3.3** *(线性映射基本定理 I) 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, 其中 $W$ 是 $F$ 上的线性空间. 则存在唯一的线性单射 $\bar{\phi}$ 使得 $\phi = \bar{\phi} \circ \pi_{\ker(\phi)}$. 特别地, $V/\ker(\phi)$ 与 $\mathrm{im}(\phi)$ 线性同构.*

**证明.** 根据上文, 我们只需验证 $\bar{\phi}$ 是线性的.

令 $U = \ker(\phi)$. 设 $\alpha, \beta \in F$, $\mathbf{x} + U, \mathbf{y} + U \in V/U$. 则

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\alpha(\mathbf{x}+U) + \beta(\mathbf{y}+U)) &= \bar{\phi}((\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) + U) && (V/U \text{ 中的运算}) \\ &= \phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) && (\bar{\phi} \text{ 的定义}) \\ &= \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}) && (\phi \text{ 线性}) \\ &= \alpha\bar{\phi}(\mathbf{x}+U) + \beta\bar{\phi}(\mathbf{y}+U) && (\bar{\phi} \text{ 的定义}). \end{aligned}$$

验证完毕. 因为 $\operatorname{im}(\bar{\phi}) = \operatorname{im}(\phi)$ 且 $\bar{\phi}$ 是单射, 所以把 $\bar{\phi}$ 看成从 $V/\ker(\phi)$ 到 $\operatorname{im}(\phi)$ 的映射是线性同构. $\square$

**推论 3.4** 利用上述定理的假设和符号, 再设 $\phi$ 是满射. 则 $V/\ker(\phi)$ 和 $W$ 线性同构.

**证明.** 由上述定理直接可得. $\square$

**推论 3.5** 设 $V_1, V_2$ 是 $V$ 的子空间. 则 $V_2/(V_1 \cap V_2)$ 和 $(V_1 + V_2)/V_1$ 线性同构.

**证明.** 设 $\phi : V_2 \to V_1 + V_2$ 是嵌入, $\pi : V_1 + V_2 \to (V_1 + V_2)/V_1$ 是自然投射. 则 $\psi = \pi \circ \phi$ 是从 $V_2$ 到 $(V_1 + V_2)/V_1$ 的线性映射. 根据引理 3.2, 任意 $(V_1 + V_2)/V_1$ 中的元素都可以表示为 $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + V_1$, 其中 $\mathbf{v}_1 \in V_1, \mathbf{v}_2 \in V_2$. 注意到 $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + V_1 = \mathbf{v}_2 + V_1$. 于是, 任何 $(V_1 + V_2)/V_1$ 中的元素都可以表示为 $\mathbf{v}_2 + V_1$. 我们推导:

$$\psi(\mathbf{v}_2) = \pi \circ \phi(\mathbf{v}_2) = \pi(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 + V_1.$$

于是 $\psi$ 是满射. 若 $\mathbf{v}_2 \in V_1 \cap V_2$, 则 $\mathbf{v}_2 + V_1 = V_1$. 由此可知, $V_1 \cap V_2 \subset \ker(\psi)$. 反之, 设 $\mathbf{v}_2 \in \ker(\psi)$. 则 $\psi(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 + V_1 = V_1$. 于是, $\mathbf{v}_2 \in V_1 \cap V_2$. 从而 $\ker(\psi) = V_1 \cap V_2$. 由推论 3.4, 这两个商空间线性同构. $\square$

上述证明可以用下列交换图简洁地表示.

$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_{\ker(\psi)}"'] \arrow[dr, "\psi"] & V_1 + V_2 \arrow[d, "\pi"] \\ V_2/\ker(\psi) \arrow[r, "\bar{\psi}"'] & (V_1+V_2)/V_1 \end{tikzcd} \qquad \text{且} \quad \ker(\psi) = V_1 \cap V_2.$$

**推论 3.6** 设 $V_1, V_2$ 是 $V$ 的子空间, 且 $V_1 + V_2$ 是直和. 则 $(V_1 + V_2)/V_1$ 和 $V_2$ 线性同构.

**证明.** 由推论 3.5, $(V_1 + V_2)/V_1$ 与 $V_2/\{\mathbf{0}\}$ 线性同构. 设 $\phi : V_2 \longrightarrow V_2$ 是恒同映射. 由推论 3.4, $V_2$ 与 $V_2/\{\mathbf{0}\}$ 线性同构. 由此可知, $(V_1 + V_2)/V_1$ 与 $V_2$ 线性同构. □

# 4 基底与维数

在本节中 $V$ 是域 $F$ 上有限生成的线性空间. 由线性组合引理可知, 如果 $V$ 可由 $k$ 个向量生成, 则 $V$ 中任何 $k+1$ 个向量一定线性相关.

## 4.1 极大线性无关集

**定义 4.1** 设 $S \subset V$ 是非空集. 设 $M \subset S$ 是线性无关集. 如果对任意 $\mathbf{v} \in S$, $\mathbf{v} \in \langle M \rangle$, 即 $S \subset \langle M \rangle$, 则称 $M$ 是 $S$ 中的一个极大线性无关集.

**例 4.2** 设 $S=\{x,x^3,2x^3+x\}\subset\mathbb{Q}[x]$. 求 $S$ 中所有的极大线性无关组.

**解.** 注意到次数两两不同的多项式组成的集合是线性无关的. 子集 $S_1=\{x,x^3\}$ 是线性无关组. 这是因为 $2x^3+x=2x^3+x$. 子集 $S_2=\{x,2x^3+x\}$ 是极大线性无关组. 这是因为 $x^3=(1/2)(2x^3+x)-(1/2)x$. 而 $S_3=\{2x^3+x,x^3\}$ 也是极大线性无关组. 这是因为 $\alpha(2x^3+x)+\beta x^3=0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ 蕴含着 $\alpha=0$, 从而 $\beta=0$. 故 $S_3$ 是线性无关集. 再注意到 $x=(2x^3+x)-2x^3$ 即可.

**命题 4.3** 设 $S\subset V$ 是非空集. 设 $T\subset S$ 是线性无关集. 再设 $V=\langle\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\rangle$. 则下述断言成立.

*(i) (可扩充)* $S$ 中有极大线性无关集 $M$ 包含 $T$, 且

$$\operatorname{card}(M)\le k.$$

*(ii) (等势)* 设 $M$ 和 $N$ 是 $S$ 中两个极大线性无关集. 则 $\operatorname{card}(M)=\operatorname{card}(N)$.

*(iii) (表示唯一)* 设 $M=\{\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_s\}\subset S$. 则 $M$ 是 $S$ 中的极大线性无关集当且仅当对任意的 $\mathbf{v}\in S$, 存在唯一的 $\alpha_1,\ldots,\alpha_s\in F$ 使得 $\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{w}_1+\cdots+\alpha_s\mathbf{w}_s$.

**证明.** (i) 和 (ii) 见上学期第二章第二讲命题 2.4. (iii) 是上学期第一章第五讲命题 1.12 (iv) 的直接推论. □

## 4.2 基底和维数

**定义 4.4** 线性空间 $V$ 的极大线性无关组称为 $V$ 一组基.

设 $B$ 是 $V$ 的极大线性无关组. 则 $V$ 的维数定义为 $\mathrm{card}(B)$. 如果 $V = \{\mathbf{0}\}$, 其维数定义为 0. 线性空间 $V$ 的维数记为 $\dim_F(V)$ 或 $\dim(V)$.

根据命题 4.3, 线性空间的维数是良定义的.

**例 4.5** *(坐标空间)* $F^n$ 的标准基

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\dim(F^n) = n$.

**例 4.6** *(矩阵空间)* 设 $E_{i,j} \in F^{m\times n}$, 其中在 $i$ 行 $j$ 列处的元素是 1, 而其它处的元素是 0, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2 \ldots, n$. 则 $\{E_{i,j} \,|\, i \in \{1, 2, \ldots, m\}, j \in \{1, 2 \ldots, n\}\}$ 是 $F^{m\times n}$ 的一组基. 于是 $\dim F^{m\times n} = mn$. 下面我们证明 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的一组基是

$$S = \{E_{i,i} \,|\, i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \{E_{i,j} + E_{j,i} \,|\, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j\}.$$

**证明.** 可直接验证 $S \subset \mathrm{SM}_n(F)$. 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{SM}_n(F)$. 则 $a_{i,j} = a_{j,i}$. 于是

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}).$$

如果

$$\sum_{i=1}^{n} b_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \le i < j \le n} b_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}) = O,$$

其中 $b_{i,i}, b_{i,j} \in F$. 可直接验证所有的 $b_{i,i} = 0$, $b_{i,j} = 0$. 于是 $S$ 是 $\mathrm{SM}_n(F)$ 的一组基. □

从而 $\dim(\mathrm{SM}_n(F)) = 1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$.

**例 4.7** *(代数空间)* 设 $d \in \mathbb{Z}^+$ 和

$$F[x]^{(d)} = \{f \in F[x] | \deg(f) < d\}$$

. 则 $F[x]^{(d)}$ 的一组基是 $\{1, x, \ldots, x^{d-1}\}$, 其维数是 $d$. 此外, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. 这是因为

$$\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

**定理 4.8** *(基扩充定理)* 设 $V$ 是有限维线性空间. 如果 $S \subset V$ 是线性无关集, 则存在 $V$ 的基底 $T$ 使得 $S \subset T$.

**证明.** 因为 $V$ 是有限维的, 所以它是有限生成的. 由基底的定义和命题 4.3 直接推出定理. □

**定理 4.9** *(线性映射基本定理 II)* 设 $V$ 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \ldots,$ $\mathbf{v}_n$, $W$ 是 $F$ 上的线性空间且 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \in W$. 则存在唯一的线性映射 $\phi : V \longrightarrow W$ 使得

$$\phi(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \ldots, \phi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n.$$

**证明.** 见上学期第二章第三讲定理 5.14 的证明. □

**定理 4.10** 设 $V$, $W$ 是 $F$ 上的有限维线性空间. 则 $V$ 和 $W$ 线性同构当且仅当 $\dim(V) = \dim(W)$. 特别地, 当 $\dim_F(V) = n$ 时, $V$ 和 $F^n$ 线性同构.

**证明.** 设 $\dim(V) = \dim(W) = n$. 令 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 和 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 分别是 $V$ 和 $W$ 的基底. 由定理 4.9 存在线性映射 $\phi :$ $V \longrightarrow W$ 和 $\psi : W \longrightarrow V$ 使得 $\phi(\mathbf{v}_i) = (\mathbf{w}_i)$ 和 $\psi(\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 于是, $\psi \circ \phi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 由定理 4.9 的唯一性可知 $\psi \circ \phi$ 是 $V$ 上的恒同映射. 同理, $\phi \circ \psi$ 是 $W$ 上的恒同映射. 于是, $\phi$ 是线性同构.

反之, 设 $V$ 的一组基是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, $\phi : V \longrightarrow W$ 是线性同构. 若 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_1\phi(\mathbf{v}_1)+\cdots+\alpha_n\phi(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W \implies \phi(\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W.$$

因为 $\phi$ 是单射, 所以 $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V$. 于是,

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \implies \phi(\mathbf{v}_1), \ldots \phi(\mathbf{v}_n) \text{ 线性无关}.$$

由定理 4.8 可知, $\dim(W) \geq \dim(V)$. 同理 $\dim(V) \geq \dim(W)$. 于是, $\dim(V) = \dim(W)$. □