第五章　多项式和复数域

4　复数

4.1　复数域

设

$$\mathbb{C} := \{x + y\sqrt{-1} \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}.$$

设 $z = x + y\sqrt{-1}$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}$. 则 x 称为 z 的实部, 记为 $\mathrm{Re}(z)$; y 称为 z 的虚部, 记为 $\mathrm{Im}(z)$. 注意到 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

定义

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x_1 + y_1\sqrt{-1}, x_2 + y_2\sqrt{-1}) & \mapsto & (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{-1}. \end{array}$$

可直接验证 $(\mathbb{C}, +, 0)$ 是交换群. 定义

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x_1 + y_1\sqrt{-1}, x_2 + y_2\sqrt{-1}) & \mapsto & (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\sqrt{-1}. \end{array}$$

可直接验证 $(\mathbb{C}, \cdot, 1)$ 是交换含幺半群.

可直接验证分配律成立. 于是, $(\mathbb{C}, +, 0, \cdot, 1)$ 是交换环.

设 $z = x + y\sqrt{-1}$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}$. 则 $\bar{z} = x - y\sqrt{-1}$ 称为 z 的共轭. 注意到

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}.$$

当 $z \neq 0$ 时,

$$z\frac{\bar{z}}{x^2+y^2} = 1.$$

故 $(\mathbb{C}, +, 0, \cdot, 1)$ 是域, 称之为复数域. 它的元素称为复数.

例 4.1 设

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

则 F 是 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 的交换子环, $(F, +, O, \cdot, E)$ 是域. 下面我们验证 F 和 $\mathbb{C}$ 是同构的.

定义

$$\begin{array}{rccc} \phi: & F & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} & \mapsto & x + y\sqrt{-1}. \end{array}$$

可直接验证对任意 $A, B \in F$, $\phi(A+B) = \phi(A) + \phi(B)$. 设

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned}\phi(AB) &= \phi(\begin{pmatrix} xu-yv & xv+yu \\ -xv-yu & xu-yv \end{pmatrix}) \\ &= (xu-yv)+(xv+yu)\sqrt{-1} \\ &= (x+y\sqrt{-1})(u+v\sqrt{-1}) \\ &= \phi(A)\phi(B).\end{aligned}$$

进而, $\phi(E)=1$. 故 ϕ 是环同态. 显然 ϕ 是满射. 再根据命题第四章第三讲命题 *4.4*, ϕ 是同构.

注意到

$$\phi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}) = \sqrt{-1}.$$

因为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -E,$$

所以 $\sqrt{-1}^2 = -1$ 是合理的.

记 $\sqrt{-1}$ 为 $\mathbf{i}$, 称为虚单位.

命题 4.2 共轭映射 $z \mapsto \bar{z}$ 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的同构且 $^{-}|_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

证明. 设 $z = x+y\mathbf{i}, x, y \in \mathbb{R}$. 则 $\bar{z} = x-y\mathbf{i}$. 于是, 当 $y=0$ 时, $\bar{z}=z$. 故 $^{-}|_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. 进而,

$$\bar{\bar{z}} = \overline{x-y\mathbf{i}} = x+y\mathbf{i} = z.$$

故共轭映射的逆是它自身, 从而是双射. 下面只需证明共轭映射是同态. 再设 $z' = x' + y'\mathbf{i}$, 其中 $x', y' \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}\overline{z + z'} &= \overline{(x + x') + (y + y')\mathbf{i}} = (x + x') - (y + y')\mathbf{i} \\ &= (x - y\mathbf{i}) + (x' - y'\mathbf{i}) = \bar{z} + \bar{z'}. \quad \square\end{aligned}$$

4.2 复数的极表示

设 $z = x + y\mathbf{i}$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}$ 不全为零. 则

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i}\right).$$

则存在唯一的 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得,

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{和} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

称 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 为 z 的模长, 记为 $|z|$. 称 θ 为 z 的幅角, 记为 $\arg z$. 再设 0 的模长为零, 幅角任意. 则对任意 $z \in \mathbb{C}$,

$$z = |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{i}).$$

称之为 z 的极化公式.

引理 4.3 设复数

$$z_1 = |z_1|(\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)\mathbf{i}), \ z_2 = |z_2|(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\mathbf{i}).$$

则

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)\mathbf{i}).$$

证明. 直接计算得

$$z_1z_2 = |z_1||z_2|$$
$$(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))\mathbf{i}$$
$$= |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_1+\theta_2)\mathbf{i}). \quad \square$$

命题 4.4 设 $z = |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{i})$.

(i) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\mathbf{i})$.

(ii) 如果 $z \neq 0$, 则 $z^{-1} = |z|^{-1}(\cos(\theta) - \sin(\theta)\mathbf{i})$.

证明. (i) 对 n 归纳. 当 $n = 0$ 时, 结论显然成立. 设 $n > 0$ 且结论对 $n-1$ 时成立.

$$z^n = zz^{n-1}$$
$$= |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{i})|z|^{n-1}(\cos((n-1)\theta) + \sin((n-1)\theta)\mathbf{i})$$
(归纳假设)
$$= |z|^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\mathbf{i}) \quad (\text{引理 } 4.3).$$

(ii) 直接计算得

$$z|z|^{-1}(\cos(\theta) - \sin(\theta)\mathbf{i})$$
$$= |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{i})|z|^{-1}(\cos(-\theta) + \sin(-\theta)\mathbf{i})$$
$$= 1 \quad (\text{引理 } 4.3). \quad \square$$

令

$$e^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{i}.$$

则, $z = |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{i})$ 可简记为 $z = |z|e^{\mathbf{i}\theta}$. 上述引理和命题中的结论可写为

$$z_1 = |z_1|e^{\mathbf{i}\theta_1}, z_2 = |z_2|e^{\mathbf{i}\theta_2} \Longrightarrow z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)}.$$

当 $z = |z|e^{\mathbf{i}\theta} \neq 0$ 时, 对任意 $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = |z|^n e^{\mathbf{i}n\theta}$, 和 $\bar{z} = |z|e^{-\mathbf{i}\theta}$.

Euler "公式"

$$e^{\mathbf{i}\pi} + 1 = 0.$$

4.3 单位根

设 $n \in \mathbb{Z}^+$. 方程 $z^n = 1$ 在 $\mathbb{C}$ 中的根称为 n 次单位根.

命题 4.5 *方程 $z^n = 1$ 在 $\mathbb{C}$ 中有 n 个互不相同的根*

$$\epsilon_k = e^{\frac{2k\pi\mathbf{i}}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

证明. 直接计算得

$$\epsilon_k^n = e^{2k\pi\mathbf{i}} = 1.$$

故 $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1}$ 都是单位根. 设 $k, m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 且 $k \leq m$. 如果 $\epsilon_k = \epsilon_m$, 则

$$1 = \epsilon_m \epsilon_k^{-1} = e^{\frac{2(m-k)\pi\mathbf{i}}{n}}.$$

因为 $m-k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, 所以 $m = k$. 故 $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{n-1}$ 两两不同. □

根据第五章第二讲定理 3.19, 方程 $z^n = 1$ 在 $\mathbb{C}$ 中的至多有 n 个根. 于是, $\mathbb{C}$ 中恰有 n 个互不相同的单位根. 记 U_n 是这些单位根的集合.

命题 4.6 *三元组 $(U_n, \cdot, 1)$ 是循环群. $U_n = \langle \epsilon_\ell \rangle$ 当且仅当 $\gcd(\ell, n) = 1$.*

证明. 设 $\epsilon_k, \epsilon_m \in U_n$. 则 $(\epsilon_k \epsilon_m^{-1})^n = \epsilon_k^n (\epsilon_m^n)^{-1} = 1$. 故 $\epsilon_k \epsilon_m^{-1} \in U_n$. 故 $(U_n, \cdot, 1)$ 是 $(\mathbb{C}^*, \cdot, 1)$ 的子群 (第四章第一讲命题 2.24).

注意到:

$$\begin{aligned} U_n = \langle \epsilon_\ell \rangle &\iff \operatorname{ord}(\epsilon_\ell) = n \\ &\iff \frac{n}{\gcd(n, \ell)} = n \text{ (上学期第四章第一讲推论 2.41)} \\ &\iff \gcd(n, \ell) = 1 \quad \square \end{aligned}$$

当 $U_n = \langle \epsilon_\ell \rangle$ 时, ϵ_ℓ 称为 n *次本原单位根*.

4.4 代数学基本定理

定理 4.7 *(代数学基本定理) 设 $f \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$. 则 f 在 $\mathbb{C}[x]$ 有根.*

上述定理的证明要用到超出本课程范围的知识. 这里不给出证明. 但它的两个推论对下学期的学习比较重要.

推论 4.8 设 $f \in \mathbb{C}[x]\backslash\mathbb{C}$. 则存在互不相同的复数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 和非零正整数 $m_1, \ldots, m_k$ 使得

$$f = \mathrm{lc}(f)(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}.$$

证明. 设 $n = \deg(f), \ell = \mathrm{lc}(f)$. 我们对 n 归纳.

设 $n > 1$ 且结论对 $n-1$ 次复系数多项式都成立. 由代数学基本定理, 存在 $\alpha\in\mathbb{C}$ 使得 $f(\alpha)=0$. 根据余式定理,

$$f(x) = (x-\alpha)g(x),$$

其中 $g \in \mathbb{C}[x]$, $\deg(g) = n-1$ 且 $\mathrm{lc}(g) = \lambda$. 由归纳假设存在互不相同的复数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ 和非零正整数 $m_1, \ldots, m_k$ 使得

$$g = \lambda(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}.$$

如果 $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, 则不妨设 $\alpha = \alpha_1$. 由此得出

$$f(x) = \lambda(x-\alpha_1)^{m_1+1}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}.$$

否则

$$f(x) = \lambda(x-\alpha)(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}. \quad \square$$

该推论说明 $\mathbb{C}[x]$ 中的不可约元是零次或者一次的多项式, 每个复系数多项式在 $\mathbb{C}$ 中的根的个数(计算重数)与其次数相同.

推论 4.9 在 $\mathbb{R}[x]$ 中的不可约元的次数至多是二次.

证明. 假设 $f(x) = f_n x^n + f_{n-1}x^{n-1} + \cdots + f_0 \in \mathbb{R}[x]$ 是不可约的且 $n > 2$ 和 $f_n \neq 0$. 因为 f 也是复系数多项式, 所以代数学基本定理蕴含 f 由复根 α. 注意到 $\alpha \notin \mathbb{R}$. 否则由余式定理 f 会有一次实系数因子 $x - \alpha$, 与 f 的不可约性矛盾. 特别地, $\bar{\alpha} \neq \bar{\alpha}$.

因为实数的共轭是它自身, 所以

$$0 = f(\alpha) = \overline{f(\alpha)} = \sum_{i=0}^{n} \bar{f}_i \bar{\alpha}^i = \sum_{i=0}^{n} f_i \bar{\alpha}^i = f(\bar{\alpha}).$$

故 f 由两个互不相同的复根 α 和 $\bar{\alpha}$. 因为 $\bar{\alpha} \neq \bar{\alpha}$, 所以 $x-\alpha$ 与 $x - \bar{\alpha}$ 不相伴. 由第二讲命题 6.27, $g := (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})$ 在 $\mathbb{C}[x]$ 中整除 f. 注意到 $f, g \in \mathbb{R}[x]$, 存在 $h \in \mathbb{R}[x]$ 使得 $f = gh$. 因为 $\deg(f) > 2$ 和 $\deg(g) = 2$, 所以 f 在 $\mathbb{R}[x]$ 中可约. 矛盾. □

该推论说明 $\mathbb{R}[x] \setminus \mathbb{R}$ 中的多项式, 都是 $\mathbb{R}[x]$ 中若干一次或二次不可约多项式的乘积.

4.5 应用举例

例 4.10 设循环矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

计算 A 的行列式. 当矩阵 A 可逆时, 求 A^{-1}.

解. 设 $\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{n-1}$ 是 n 个 n 次单位根. 令

$$f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{C}[x].$$

对 $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, 利用 $\epsilon_k^n = 1$ 得到

$$f(\epsilon_k) = a_0 + a_1\epsilon_k + \cdots + a_{n-2}\epsilon_k^{n-2} + a_{n-1}\epsilon_k^{n-1},$$

$$\epsilon_k f(\epsilon_k) = a_{n-1} + a_0\epsilon_k + \cdots + a_{n-3}\epsilon_k^{n-2} + a_{n-2}\epsilon_k^{n-1},$$

$$\epsilon_k^2 f(\epsilon_k) = a_{n-2} + a_{n-1}\epsilon_k + \cdots + a_{n-4}\epsilon_k^{n-2} + a_{n-3}\epsilon_k^{n-1},$$

$$\vdots$$

$$\epsilon_k^{n-1} f(\epsilon_k) = a_1 + a_2\epsilon_k + \cdots + a_{n-1}\epsilon_k^{n-2} + a_0\epsilon_k^{n-1}.$$

利用矩阵写成

$$f(\epsilon_k)\begin{pmatrix}1\\ \epsilon_k\\ \epsilon_k^2\\ \vdots\\ \epsilon_k^{n-1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ \epsilon_k\\ \epsilon_k^2\\ \vdots\\ \epsilon_k^{n-1}\end{pmatrix},\quad k=0,1,\ldots,n-1.$$

设

$$V=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \epsilon_0 & \epsilon_1 & \cdots & \epsilon_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \epsilon_0^{n-1} & \epsilon_1^{n-1} & \cdots & \epsilon_{n-1}^{n-1}\end{pmatrix}.$$

则 $V\mathrm{diag}(f(\epsilon_0),\ldots,f(\epsilon_{n-1}))=AV$. 由 *Vandermonde* 行列式可知, V 可逆. 故

$$A=V\mathrm{diag}(f(\epsilon_0),\ldots,f(\epsilon_{n-1}))V^{-1}.$$

两边取行列式得

$$\det(A)=f(\epsilon_0)\cdots f(\epsilon_{n-1}).$$

而 A 可逆当且仅当任何 n 次单位根都不是 f 的根. 此时,

$$A^{-1}=V\mathrm{diag}(f(\epsilon_0)^{-1},\ldots,f(\epsilon_{n-1})^{-1})V^{-1}.$$

例 4.11 设

$$H=\left\{\begin{pmatrix}u & v\\ -\bar{v} & \bar{u}\end{pmatrix}\mid u,v\in\mathbb{C}\right\}.$$

则 $(H,+,O,\cdot,E)$ 是 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 中的非交换子环, 且 H 中的每个非零元在 H 中有可逆元. 这是数学史上第一个斜域*(skew-field)*, 称为 *Hamilton* 四元数系.

验证如下:

(i) 设 $W=\begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$ 和 $Z=\begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix}$, 其中 $u,v,x,y\in\mathbb{C}$.

我们有

$$W-Z=\begin{pmatrix} u-x & v-y \\ -\bar{v}+\bar{y} & \bar{u}-\bar{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u-x & v-y \\ -\overline{v-y} & \overline{u-x} \end{pmatrix}\in H.$$

故 $(H,+,O)$ 是 $(\mathrm{M}_2(\mathbb{C}),+,O)$ 的子群.

计算

$$WZ=\begin{pmatrix} ux-v\bar{y} & uy+v\bar{x} \\ -\bar{v}x-\bar{u}\bar{y} & -\bar{v}y+\bar{u}\bar{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ux-v\bar{y} & uy+v\bar{x} \\ -\overline{(uy+v\bar{x})} & \overline{ux-v\bar{y}} \end{pmatrix}\in H.$$

注意到

$$E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}\in H.$$

故 H 是 $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ 的子环.

(ii) 设 $A=\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$ 和 $B=\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}$. 则 $A,B\in H$.

直接计算得

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $AB \neq BA$, 所以 H 不是交换环.

(iii) 设 $W \neq O$. 则 $\det(W) = |u|^2 + |v^2| \neq 0$. 故 W 是可逆矩阵. 在 $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ 中,

$$W^{-1} = \frac{1}{u\bar{u} + v\bar{v}} \begin{pmatrix} \bar{u} & -v \\ \bar{v} & u \end{pmatrix} \in H.$$

故 W 在 H 中可逆.

期末小结

矩阵部分

设 F 是域.

1. 秩不等式: 设 $A \in F^{m\times s}, B \in F^{s\times n}$ 则

   $$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-s \leq \mathrm{rank}(AB) \leq \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)).$$

2. 方阵

   (a) $(\mathrm{M}_n(F), +, O, \cdot, E)$ 是非交换环且对任意 $\lambda \in F$, $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$,

   $$\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B, \quad \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

   (b) A 可逆当且仅当 A 满秩;

(c) A 是左(右)零因子当且仅当 A 亏秩且 $A \neq O$;

(d) A 是中心元当且仅当 A 是数乘矩阵, 矩阵的迹是交换不变量;

(e) $(\mathrm{M}_n(F), +, O, \cdot, E)$ 所有可逆矩阵对于乘法构成群 $\mathrm{GL}_n(F)$, 称为 F 上的一般线性群. 特别有: 对于任意 $A, B \in \mathrm{GL}_n(F)$

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A \quad \text{和} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3. 初等等价

(a) 第 I、II、III 类初等矩阵的定义、意义和它们的逆都是同类初等矩阵;

(b) 打洞引理;

(c) 可逆矩阵是初等矩阵之积，等价地说法, $\mathrm{GL}_n(F)$ 的一组生成元是所有 F 上的 $n \times n$ 初等矩阵.

4. 矩阵求逆

(a) 行变换法,

(b) 多项式法: 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 则存在 $f \in F[A] \setminus 0$ 使得 $f(A) = 0$. 设 f 是满足上述条件的次数最小的多项式. 则 A 可逆当且仅当 $f(0) \neq 0$. 此时, 通过 f 可以求出 $g \in F[x]$ 使得 $A^{-1} = g(A)$.

5. 矩阵分块运算

6. 利用矩阵分块证明秩的不等式

行列式部分

1. 定义与性质:

   (a) 行列式定义只需要加法和乘法;

   $$\det((a_{i,j})_{n\times n}) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon_\sigma a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

   (b) 行列式多重线性斜对称, 且如果有两行或两列相同, 则行列式的值等于零;

   (c) 转置保持行列式的值;

   (d) 行列式乘积定理.

2. 行列式的计算

   (a) 利用初等行列变换化为上(下)三角形;

   (b) 利用按一行一列展开找递归公式, 并用归纳法证明该公式;

   (c) 利用分块矩阵计算行列式.

3. 行列式的应用

(a) 伴随矩阵和原矩阵的逆的关系. 当 A 可逆时, $A^{-1} = A^{\vee}/\det(A)$.

(b) Cramer 法则;

(c) 矩阵的秩和它子式的关系, 方阵可逆当且仅当其行列式非零.

群、环、域

1. 群

(a) 群、同态、同构、子群的定义, 子群的判别法;

(b) 最低阶的非循环群，最低阶的非交换群;

(c) 群和子群的生成元;

(d) 群中元素的阶的计算;

(e) 循环群的分类, 确定循环群的所有子群.

(f) Lagrange 定理和 Cayley 定理.

2. 环

(a) 环、同态、同构、子环, 整环的定义;

(b) 广义分配律;

(c) 子环的验证;

(d) 环中的左和右零因子和可逆元,
环中所有可逆元组成的乘法群,
确定环中的可逆元和左右零因子;

(e) 同态(单同态)与消去律.

3. 域

(a) 域、子域, 域的特征,

(b) 整环的分式域 (不要求证明),

(c) $\mathbb{Z}_p$ 中的运算,

(d) 域上的线性代数.

一元多项式

1. 在 $R[x]$ 中

(a) 次数、首项系数

(b) 加法、乘法

(c) 赋值同态: 设 $f \in F[x]$, $r \in F$, $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 计算 $f(r)$ 和 $f(A)$. 设 $g \in \mathbb{Z}[x]$, $\bar{k} \in \mathbb{Z}_n$. 计算 $g(\bar{k})$.