第二章　矩阵

我们将证明

定理 8.2 设 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $A \sim_e B \Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

为此, 我们需要用矩阵乘法来解释初等变换.

定义 8.3 设 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(i) $F_{i,j}^{(n)}$ 是把 E_n 中第 i 行和第 j 行互换的得到的矩阵. 称之为第一类初等矩阵.

(ii) 设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 且 $i \neq j$. 则 $F_{i,j}^{(n)}(\alpha)$ 是把 E_n 中第 j 行通乘 α 加到第 i 行得到的矩阵. 称之为第二类初等矩阵.

(iii) 设 $\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\lambda \neq 0$. 则 $F_{i}^{(n)}(\lambda)$ 是把 E_n 中第 i 行通乘 λ 得到的矩阵. 称之为第三类类初等矩阵.

这三类矩阵统称为 n 阶初等矩阵.

注解 8.4 可直接验证 $(F_{i,j}^{(n)})^2 = E_n$, $F_{i,j}^{(n)}(\alpha)F_{i,j}^{(n)}(-\alpha) = E_n$, 和 $F_{i}^{(n)}(\lambda)F_{i}^{(n)}(\lambda^{-1}) = E_n$. 故初等矩阵都是可逆的, 且它们的逆也是初等矩阵.

我们可以通过搬运工引理(上一讲引理 7.12)中定义矩阵 $E_{i,j}^{(k)}$ 表示初等矩阵如下:

$$F_{i,j}^{(n)} = E_n - E_{i,i}^{(n)} - E_{j,j}^{(n)} + E_{i,j}^{(n)} + E_{j,i}^{(n)}, \tag{1}$$

$$F_{i,j}^{(n)}(\alpha) = E_n + \alpha E_{i,j}^{(n)}, \tag{2}$$

$$F_i^{(n)}(\lambda) = E_n + (\lambda - 1)E_{i,i}^{(n)}. \tag{3}$$

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 根据 (1),

$$F_{i,j}^{(m)}A = A - E_{i,i}^{(m)}A - E_{j,j}^{(m)}A + E_{i,j}^{(m)}A + E_{j,i}^{(m)}A.$$

根据搬运工引理, $F_{i,j}^{(m)}A$ 是把 A 中 i, j 两行对换得到的矩阵. 根据 (2),

$$F_{i,j}^{(m)}(\alpha)A = A + \alpha E_{i,j}^{(m)}A.$$

同理, $F_{i,j}^{(m)}(\alpha)A$ 是把 A 中第j 行乘以 α 后加到第 i 行得到的矩阵. 根据 (3),

$$F_i^{(m)}(\lambda)A = A + (\lambda - 1)E_{i,i}^{(m)}A.$$

从而得到把 A 中第 i 行通乘 λ 的矩阵.

类似地, $AF_{i,j}^{(n)}$, $AF_{i,j}^{(n)}(\alpha)$ 和 $AF_i^{(n)}(\lambda)$ 分别是把 A 中 i, j 两行对换, 把 A 中第 i 列乘以 α 后加到第 j 列, 和把 A 中第 i 列通乘 λ 后得到的矩阵.

引理 8.5 *(打洞引理) 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则存在可逆矩阵 $P \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ 和 $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 其中 P 和 Q 都是初等矩阵的乘积, 使得*

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix},$$

且 $\mathrm{rank}(A) = r$.

证明. 根据第一章第一讲命题 2.3 和第三类初等行变换, 存在若干个 m 阶初等矩阵, 使得它们的积 P 满足

$$PA=\begin{pmatrix}
0\cdots0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots0
\end{pmatrix},$$

其中共有 r 行非零. 则存在若干个 n 阶第一类初等矩阵, 使得它们的积 Q_1 满足

$$PAQ_1=\begin{pmatrix}
1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\
0 & 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots0
\end{pmatrix},$$

进而存在若干个 n 阶第一类初等矩阵, 使得它们的积 Q_2

满足

$$
PAQ_1Q_2 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\,0\cdots 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\,0\cdots 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\,0\cdots 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\,0\cdots 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\,0\cdots 0
\end{pmatrix}.
$$

再令 $Q = Q_1Q_2$ 即可, 这是因为初等矩阵之积必然可逆. 根据第二章第五讲推论 6.27, $\operatorname{rank}(A) = r$. □

注解 8.6 打洞引理也可写成:

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\operatorname{rank}(A) = r$. 则

$$
A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q,
$$

其中 $P \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ 可逆, $Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆.

例 8.7 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(A)=r>0$. 则存在 $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ 满足 $A = BC$ 和 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(C) = r$.

证明. 根据打洞引理, 存在 m 阶和 n 阶可逆矩阵 P 和 Q 使得

$$
A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.
$$

直接验证得

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} = \begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}_{m\times r} (E_r, O)_{r\times n}.$$

令

$$B = P\begin{pmatrix} E_r \\ O \end{pmatrix}_{m\times r} \quad \text{和} \quad C = (E_r, O)_{r\times n} Q$$

即可.

推论 8.8 可逆矩阵是若干初等矩阵之积.

证明. 设 A 可逆. 则 A 满秩. 由打洞引理的证明可知, 存在初等矩阵 $P_1 \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_\ell$ 使得

$$P_k \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_\ell = E.$$

故

$$A = (P_k \cdots P_1)^{-1}(Q_1 \cdots Q_\ell)^{-1} = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1} Q_\ell^{-1} \cdots Q_1^{-1}.$$

因为初等矩阵的逆还是初等矩阵, 所以推论成立. □

9 矩阵求逆

引理 9.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}, B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 设 $B = (B_1, \ldots, B_k)$, 其中 $B_\ell \in \mathbb{R}^{s\times n_\ell}$, $\ell = 1, \ldots, k$. 则 $AB = (AB_1, \ldots, AB_k)$.

证明. 由列向量乘积公式(第二章第四讲注解 6.17 (ii))

$$AB = (A\vec{B}^{(1)}, \ldots, A\vec{B}^{(n)}).$$

故

$$AB = \left(A \underbrace{\left(\vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(n_1)}\right)}_{B_1}, \ldots, A \underbrace{\left(\vec{B}^{(n_1+\cdots+n_{k-1}+1)}, \ldots, \vec{B}^{(n)}\right)}_{B_k} \right). \quad \square$$

命题 9.2 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆, $B = (A, E_n) \in \mathbb{R}^{n\times 2n}$, $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果 $PB = (E_n|Q)$, 则 $P = Q = A^{-1}$.

证明. 由上述引理可知, $PB = P(A, E_n) = (PA, P)$. 于是, $PA = E_n$ 和 $P = Q$. 根据第二章第五讲命题 7.18, $P = A^{-1}$. $\square$

设 A 可逆. 则 A^{-1} 是若干初等矩阵 $C_1, \ldots, C_k$ 之积(推论 8.8). 由上述命题可知: $(C_1 \cdots C_k)(A|E_n) = (E_n|A^{-1})$. 于是, 对 $(A|E_n)$ 做初等行变换必然可以把它的前 n 列组成的子矩阵化为单位矩阵, 后 n 列组成的子矩阵就是 A^{-1}.

例 9.3 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算 A^{-1}.

解. 我们计算

$$
\begin{aligned}
(A|E) &\xrightarrow{F_{1,2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{3,1}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_2(\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{3,2}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{1,2}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right) \\
&\xrightarrow{F_{1,3}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{array}\right).
\end{aligned}
$$

于是, $A^{-1} = F_{1,3}(1)F_{1,2}(-1)F_{3,2}(1)F_2(\frac{1}{2})F_{3,1}(-2)F_{1,2}$.

另一种常见的矩阵求逆的的方法如下: 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 设 k 是最小的正整数使得 $A^0, A^1, \ldots, A^k$ 在 $\mathbb{R}$ 上“线性相

关". 即存在 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 且 $\alpha_k \neq 0$ 使得

$$\alpha_k A^k + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 E = O. \tag{4}$$

我们有下述结论:

命题 9.4 利用以上记号, 则 A 可逆当且仅当 $\alpha_0 \neq 0$. 此时 $A^{-1} = -\alpha_0^{-1}(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_k A^{k-1})$.

证明. 设 $\alpha_0 \neq 0$. 由 (4) 可知,

$$A(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_k A^{k-1}) = -\alpha_0 E \Longrightarrow A\underbrace{(-\alpha_0^{-1})(\alpha_1 E + \cdots + \alpha_k A^{k-1})}_{B} = E.$$

于是, A 可逆且 $B = A^{-1}$ (第二章第五讲命题 7.18).

反之, 设 A 可逆. 假设 $\alpha_0 = 0$. 则

$$A(\alpha_k A^{k-1} + \cdots + \alpha_2 A + \alpha_1 E) = O.$$

两侧同乘 A^{-1} 得到

$$\alpha_k A^{k-1} + \cdots + \alpha_2 A + \alpha_1 E = O.$$

因为 $\alpha_k \neq 0$, 我们得到与 k 的极小性相矛盾的结果. □

例 9.5 设

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

确定 A_n 是否可逆并当可逆时计算 A_n^{-1}.

解. 注意到 E_n 和 A_n 在 $\mathbb{R}$ 上"线性无关". 计算

$$
\begin{aligned}
A_n^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n & n-4 & n-4 & \cdots & n-4 & n-4 \\ n-4 & n & n-4 & \cdots & n-4 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-4 & n-4 & n-4 & \cdots & n & n-4 \\ n-4 & n-4 & n-4 & \cdots & n-4 & n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2n-4)-(n-4) & n-4 & \cdots & n-4 \\ n-4 & (2n-4)-(n-4) & \cdots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-4 & n-4 & \cdots & (2n-4)-(n-4) \end{pmatrix} \\
&= (2n-4)E_n - (n-4)A_n.
\end{aligned}
$$

我们得到 $A_n^2 + (n-4)A_n - (2n-4)E_n = O$. 由命题 9.4 可知, A_2 不可逆且 $n \neq 2$ 时, A_n 可逆. 此时,

$$A_n^{-1} = \frac{1}{2n-4}(A_n + (n-4)E_n).$$

10 矩阵分块

10.1 基本公式

引理 10.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 令

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1, \dots, B_q \end{pmatrix}.$$

则 $AB = (A_k B_\ell)_{p\times q}$.

证明. 断言:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix}.$$

断言的证明. 根据引理 9.1. 我们计算

$$(AB)^t = B^t A^t = B^t(A_1^t, \dots, A_p^t) = (B^t A_1^t, \dots, B^t A_p^t).$$

于是,

$$AB = (B^t A_1^t, \dots, B^t A_p^t)^t = \begin{pmatrix} (B^t A_1^t)^t \\ \vdots \\ (B^t A_p^t)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix}.$$

断言成立.

由此和引理 9.1 可知,

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(B_1, \dots, B_q) \\ \vdots \\ A_p(B_1, \dots, B_q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & \dots & A_1 B_q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_p B_1 & \dots & A_p B_q \end{pmatrix}. \quad \square$$

引理 10.2 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 令

$$A = (A_1, \dots, A_k) \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{pmatrix},$$

其中 $A_i \in \mathbb{R}^{m\times s_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{s_i\times n}$, $i = 1, 2, \dots, k$. 则

$$AB = A_1 B_1 + \cdots + A_k B_k.$$

证明. 设 $A = (a_{i,\ell})_{m\times s}$ 和 $B = (b_{\ell,j})_{s\times n}$.

先考虑 $k = 2$ 的情形. 令

$$C = (c_{i,j})_{m\times n} = AB \quad 和 \quad D = (d_{i,j})_{m\times n} = A_1 B_1 + A_2 B_2.$$

则对任意 $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$d_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{s_1} a_{i,\ell} b_{\ell,j} + \sum_{\ell=s_1+1}^{s_1+s_2} a_{i,\ell} b_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{s} a_{i,\ell} b_{\ell,j} = c_{i,j}.$$

结论成立.

设 $k > 2$ 且结论对 $k - 1$ 成立. 记

$$\tilde{A} = (A_1, \dots, A_{k-1}), \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{k-1} \end{pmatrix}.$$

则 $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m\times(s-s_n)}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{(s-s_n)\times n}$. 于是

$$AB = \tilde{A}\tilde{B} + A_k B_k = A_1 B_1 + \cdots + A_{k-1}B_{k-1} + A_k B_k,$$

其中第一个等式来自 $k=2$ 时的结论, 第二个等式来自归纳假设. □

定理 10.3 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 令

$$A = \begin{pmatrix} A_{1.1} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\ell,1} & \cdots & A_{\ell,k} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{k,1} & \cdots & B_{k,p} \end{pmatrix},$$

其中 $A_{i,q} \in \mathbb{R}^{m_i\times s_q}$, $B_{q,j} \in \mathbb{R}^{s_q\times n_j}$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$, $j = 1, 2, \ldots, p$, $q = 1, \ldots, k$. 则

$$AB = \left(\sum_{q=1}^{k} A_{i,q}B_{q,j}\right)_{1\le i\le \ell, 1\le j\le p}.$$

证明. 设

$$A_i = \begin{pmatrix} A_{i,1}, \ldots, A_{i,k} \end{pmatrix}, \ i = 1, \ldots, \ell, \quad B_j = \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{k,j} \end{pmatrix}, \ j = 1, \ldots, p.$$

根据引理 10.1,

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_\ell \end{pmatrix} (B_1, \ldots, B_p) = (A_i B_j)_{1\le i\le \ell, 1\le j\le p}.$$

根据引理 10.2,

$$A_iB_j = \begin{pmatrix} A_{i,1}, \ldots, A_{i,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{k,j} \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^{k} A_{i,k}B_{k,j}. \quad \square$$

例 10.4 设分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & O & \cdots & O \\ O & D_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & D_k \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$$

其中 $D_i \in \mathrm{M}_{n_i}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 则对任意 $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$A^m = \begin{pmatrix} D_1^m & O & \cdots & O \\ O & D_2^m & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & D_k^m \end{pmatrix}.$$

例 10.5 设分块对角矩阵

$$P = \begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R}),$$

其中 $M \in \mathrm{M}_p(\mathbb{R}), N \in \mathrm{M}_q(\mathbb{R})$, $p + q = m$. 设

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

其中 $A_{1,1}$ 有 p 行, $A_{2,2}$ 有 q 行. 则

$$PA = \begin{pmatrix} MA_{1,1} & MA_{1,2} \\ NA_{2,1} & NA_{2,2} \end{pmatrix}.$$

类似地, 设

$$Q = \begin{pmatrix} S & O \\ O & T \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}),$$

其中 S 的行数与 $A_{1,1}$ 的列数相同, T 的行数与 $A_{2,2}$ 的列数相同. 则

$$AQ = \begin{pmatrix} A_{1,1}S & A_{1,2}T \\ A_{2,1}S & A_{2,2}T \end{pmatrix}.$$

应用打洞引理时, 下列公式是有用的. 其证明是引理 10.1 的简单应用.

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times p} \\ O_{q\times r} & O_{p\times q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ O_{q\times r} \end{pmatrix} (E_r, O_{r\times p}). \tag{5}$$

例 10.6 *(矩阵乘法分解)* 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(A)=r>0$. 则

$$A = BC$$

其中 $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$ 和 $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$.

证明. 根据引理 *8.5* 和 (5), 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix} (E_r, O_{r\times(n-r)}).$$

于是,

$$A = \underbrace{P^{-1}\begin{pmatrix} E_r \\ O_{(m-r)\times r} \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{(E_r, O_{r\times(n-r)})Q^{-1}}_{C}.$$

例 10.7 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, X 是 n 阶未知方阵. 解矩阵方程

$$AXA = A.$$

解. 由打洞引理, 存在可逆矩阵 $P, Q \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.$$

代入原方程得

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $Y = QXP$. 设

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} \end{pmatrix},$$

其中 $Y_{1,1} \in \mathrm{M}_r(\mathbb{R})$. 则上述方程化简为:

$$\begin{pmatrix} Y_{1,1} & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

于是 $Y_{1,1}=E_r$, 其它元素任意. 故

$$X=Q^{-1}\begin{pmatrix}E_r & Y_{1,2}\\ Y_{2,1} & Y_{2,2}\end{pmatrix}P^{-1},$$

其中 $Y_{1,2}\in\mathbb{R}^{r\times(n-r)}$, $Y_{2,1}\in\mathbb{R}^{(n-r)\times r}$, $Y_{2,2}\in\mathrm{M}_{n-r}(\mathbb{R})$ 是任意矩阵.

10.2 矩阵秩的（不）等式

引理 10.8 设矩阵 M 具有以下四种分块形式之一

$$\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}A & C\\ O & B\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}C & A\\ B & O\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}O & A\\ B & C\end{pmatrix}.$$

则 $\operatorname{rank}(M)\geq\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$ 且当 $C=O$ 时等号成立.

证明. 这四种形式可以通过第一类初等变换和转置互相转化. 因为初等变换和转置不改变矩阵的秩, 所以不妨假设

$$M=\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}.$$

设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $B\in\mathbb{R}^{k\times\ell}$. 设 $\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(p)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基, $\vec{B}^{(1)},\ldots,\vec{B}^{(q)}$ 是 $V_c(B)$ 的一组基.

断言. 向量 $\vec{M}^{(1)},\ldots,\vec{M}^{(p)},\vec{M}^{(n+1)},\ldots,\vec{M}^{(n+q)}$ 线性无关.

断言的证明. 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\beta_1,\ldots,\beta_q\in\mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1\vec{M}^{(1)}+\cdots+\alpha_p\vec{M}^{(p)}+\beta_1\vec{M}^{(n+1)}+\cdots+\beta_q\vec{M}^{(n+q)}=\mathbf{0}_{m+k}.$$

则

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \vec{A}^{(1)} \\ \vec{C}^{(1)} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_p \begin{pmatrix} \vec{A}^{(p)} \\ \vec{C}^{(p)} \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \vec{B}^{(1)} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_q \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \vec{B}^{(q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_k \end{pmatrix}.$$

于是，$\alpha_1\vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_p\vec{A}^{(p)} = \mathbf{0}_m$. 故 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$.
进而 $\beta_1\vec{B}^{(n+1)} + \cdots + \beta_q\vec{B}^{(n+q)} = \mathbf{0}_k$. 故 $\beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$.
断言成立.

由断言可知, $\operatorname{rank}(M) \geq p + q = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

设 $C = O_{k\times n}$. 当 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 时,

$$\vec{M}^{(j)} = \begin{pmatrix} \vec{A}^{(j)} \\ \mathbf{0}_k \end{pmatrix} \implies \vec{M}^{(j)} \in \langle \vec{M}^{(1)}, \ldots, \vec{M}^{(p)} \rangle.$$

类似地, 当 $j \in \{n+1, \ldots, n+\ell\}$ 时,

$$\vec{M}^{(j)} \in \langle \vec{M}^{(n+1)}, \ldots, \vec{M}^{(n+q)} \rangle.$$

根据断言, $\operatorname{rank}(M) = p + q = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. □

推论 10.9 *设上述引理中 A 和 B 是可逆方阵, 则 M 也是可逆方阵.*

证明. 设 $A \in \mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ 和 $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 $M \in \mathrm{M}_{m+n}(\mathbb{R})$. 则 $\operatorname{rank}(M) \leq m + n$ (第二章第三讲例 3.10). 由上述引理, $\operatorname{rank}(M) \geq m + n$. 故 $\operatorname{rank}(M) = m + n$. 于是, M 可逆(第二章第五讲定理 7.14). □

例 10.10 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 证明

$$\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) - s.$$

证明. 只要证 $\operatorname{rank}(AB) + s \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. 设

$$M = \begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+s)\times(n+s)}.$$

根据引理 *10.8,* $\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(AB) + s$. 我们计算

$$N := \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_s \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & E_s \end{pmatrix},$$

$$P := N \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A \\ -B & E_s \end{pmatrix}.$$

因为矩阵乘法不可能增加秩, 所以 $\operatorname{rank}(M) \geq \operatorname{rank}(P)$. 由引理 *10.8* 得出,

$$\operatorname{rank}(M) \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(-B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

例 10.11 *(Sylvester 等式)* 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$. 证明*:*

$$\operatorname{rank}(E_m + AB) + n = \operatorname{rank}(E_n + BA) + m.$$

证明. 设

$$M = \begin{pmatrix} E_m + AB & O \\ O & E_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+n}(\mathbb{R}).$$

我们计算

$$N := \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}}_{C_1} M = \begin{pmatrix} E_m + AB & A \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

$$P := N \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ -B & E_n \end{pmatrix}}_{C_2} = \begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix},$$

$$Q := \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ B & E_n \end{pmatrix}}_{C_3} P = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n + BA \end{pmatrix},$$

$$R := Q \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}}_{C_4} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n + BA \end{pmatrix}.$$

注意到 $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathrm{M}_{m+n}(\mathbb{R})$ 且引理 *10.8* 蕴含

$$\operatorname{rank}(C_i) \geq \operatorname{rank}(E_m) + \operatorname{rank}(E_n) = m + n.$$

故 C_1, C_2, C_3, C_4 都满秩. 根据第二章第九讲推论 *6.27*,

$$\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(R).$$

再由引理 *10.8* 可知,

$$\operatorname{rank}(M) = \operatorname{rank}(R) \implies \operatorname{rank}(E_m + AB) + n = \operatorname{rank}(E_n + BA) + m.$$