第二章　矩阵

4　秩与线性方程组

4.1　定性部分

定理 4.1 *设 L 是以矩阵 $B = (A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组.*

(i) L 相容当且仅当 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$.

(ii) L 确定当且仅当 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) = n$.

证明. (i) 注意到 $V_c(A) \subset V_c(B)$. 故 $\operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}(B)$.

设 L 相容. 则 $\mathbf{b} \in V_c(A)$ (见第二章第一讲例 1.4). 于是, $V_c(B) \subset V_c(A)$ (第二章第二讲命题 1.26 (ii)).. 故 $V_c(A) = V_c(B)$. 从而 $\dim(V_c(A)) = \dim(V_c(B))$. 于是, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$ (第二章第二讲定理 3.6).

反之, 设 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$. 则 $\dim(V_c(A)) = \dim(V_c(B))$ (上一讲讲定理 3.6). 因为 $V_c(A) \subset V_c(B)$, 所以 $V_c(A) = V_c(B)$ (上一讲命题 2.14). 我们得到 $\mathbf{b} \in V_c(A)$, 即 L 相容 (见第二章第一讲例 1.4).

(ii) 设 L 确定. 则 L 相容. 故 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$. 下面证明 $\operatorname{rank}(A) = n$, 即 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)}$ 线性无关.

设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ 使得 $\alpha_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\alpha_n\vec{A}^{(n)}=\mathbf{0}_m$. 且 $(\beta_1,\ldots,\beta_n)^t$ 是 L 的解. 则 $(\alpha_1+\beta_1,\ldots,\alpha_n+\beta_n)^t$ 也是 L 的解. 因为 L 确定, 所以 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$. 由此可知 $\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}$ 线性无关.

反之, 设 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=n$. 由 (i) 可知 L 相容. 故 $\mathbf{b}\in V_c(A)$. 因为 $\dim(V_c(A))=n$, 所以 $\vec{A}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基. 于是, 存在唯一的 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{b}=\lambda_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\lambda_n\vec{A}^{(n)}$. 故 $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^t$ 是 L 唯一解. □

推论 4.2 *设 H 是以矩阵 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组. 则 H 只有平凡解当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=n$.*

证明. 注意到 H 是以 $B=(A|\mathbf{0}_m)$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 显然 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)$. 根据定理 4.1 (ii). H 只有平凡解当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=n$. □

在应用中, 由 n 个方程组成的 n 元线性方程组出现的较多. 为此, 我们给出下列两个推论.

推论 4.3 *设 L 是以矩阵 $B=(A|\mathbf{b})\in\mathbb{R}^{n\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 则 L 确定当且仅当 $\operatorname{rank}(A)=n$.*

证明. 设 L 确定. 根据定理 4.1 (ii), $\operatorname{rank}(A)=n$. 反之, 设 $\operatorname{rank}(A)=n$. 则

$$n=\operatorname{rank}(A)\le\operatorname{rank}(B)\le\min(n+1,n)=n.$$

故 $\operatorname{rank}(B)=n$. 根据定理 4.1 (ii), L 确定. □

推论 4.4 设 L 是以矩阵 $B = (A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组, H 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组. 则 L 确定当且仅当 H 确定.

证明. 由推论 4.3 可知, L 确定当且仅当 $\mathrm{rank}(A) = n$. 再由推论 4.2 可知, $\mathrm{rank}(A) = n$ 当且仅当 H 只有平凡解. □.

例 4.5 科斯特利金书第七页平板受热问题.

4.2 定量部分

定理 4.6 *(对偶定理, 方程组版)* 设 H 是以 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组. 则

$$\dim(\mathrm{sol}(H)) + \mathrm{rank}(A) = n.$$

证明. 设 $r = \mathrm{rank}(A)$. 不妨设 $\vec{A}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(r)}$ 是 $V_c(A)$ 的一组基. 则对任意 $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, 存在 $\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,r}$ 使得

$$\vec{A}^{(j)} = \alpha_{j,1}\vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_{j,r}\vec{A}^{(r)}.$$

令 $\mathbf{v}_j = (\alpha_{j,1}, \ldots, \alpha_{j,r}, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0)^t$, 其中 -1 出现在第 j 个位置. 则 $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 H 的解. 由 -1 在 $\mathbf{v}_j$ 中出现的位置可断定 $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 线性无关. 对任意 $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t \in \mathrm{sol}(H)$,

$$\mathbf{z} + z_{r+1}\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + z_n\mathbf{v}_n = (\beta_1, \ldots, \beta_r, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-r})^t \in \mathrm{sol}(H), \tag{1}$$

其中 $\beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{R}$. 这是因为 $\mathrm{sol}(H)$ 是子空间 (见第二章第一讲例 1.18 和命题 1.17). 由此可知,

$$\beta_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{A}^{(r)} = \mathbf{0}_m.$$

故 $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$. 由 (1) 可知,

$$\mathbf{z} = (-z_{r+1})\mathbf{v}_{r+1} + \cdots + (-z_n)\mathbf{v}_n.$$

进而, $\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathrm{sol}(H)$ 的基. 故 $\dim(\mathrm{sol}(H))=n-r$. □

例 4.7 计算下列齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

解空间的一组基.

解. 该方程组的系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

通过初等行变换得

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

于是, $\mathrm{rank}(A)=3$. 根据定理 *4.6*, $\dim(\mathrm{sol}(H))$=4−3=1. 由高斯消去可知, 给定的方程组等价于:

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_2+2x_4=0 \\ 2x_3-2x_4=0 \end{cases} \quad \text{等价于} \quad \begin{cases} x_1-x_2-x_3=x_4 \\ x_2=-x_4 \\ x_3=x_4 \end{cases}.$$

令 $x_4=1$. 则 $x_3=1$, $x_2=-1$, $x_1=1$. 该方程组有非零解 $\mathbf{v}=(1,-1,1,1)^t$. 故 $\mathrm{sol}(H)$ 的基是 $\mathbf{v}$. 写成集合的形式, 我们有 $\mathrm{sol}(H)=\{\lambda\mathbf{v}\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$.

设 $M\in\mathbb{R}^n$ 是线性流形. 则 M 的方向的维数定义为 M 的维数, 也记为 $\dim(M)$.

推论 4.8 设 L 是以 $B=(A|\mathbf{b})\in\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 如果 L 相容, 则

$$\dim(\mathrm{sol}(L))+\mathrm{rank}(A)=n.$$

证明. 设 H 是以 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组. 设 $\mathbf{v}\in\mathrm{sol}(L)$. 根据第二章第一讲例 1.22, $\mathrm{sol}(L)=\mathbf{v}+\mathrm{sol}(H)$. 于是, $\dim(\mathrm{sol}(L))=\dim(\mathrm{sol}(H))$. 再根据定理 4.6,

$$n=\dim(\mathrm{sol}(H))+\mathrm{rank}(A)=\dim(\mathrm{sol}(L))+\mathrm{rank}(A). \quad \square$$

例 4.9 确定下列线性方程组 L

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 &= 5 \end{cases}$$

的解流形.

解. 该方程组的增广矩阵

$$B = (A|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

通过初等行变换得

$$B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, $\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A) = 2$. 根据定理 *4.1*, L 相容. 根据定理 *4.6*, $\dim(\mathrm{sol}(L)) = 5 - 2 = 3$. 由高斯消去可知, 给定方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_2 + 2x_4 = 2 \end{cases} \text{等价于} \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 + x_3 + x_4 - x_5 \\ x_2 = 1 - x_4. \end{cases}$$

令 $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. 我们得到 $\mathbf{v} = (2, 1, 0, 0, 0)^t$ 是 L 的一个*(*特*)*解.

再由对系数矩阵的高斯消去法可知，以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 H 等价于

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{等价于} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = x_3 + x_4 - x_5 \\ x_2 = -x_4. \end{cases}$$

分别令 $x_3 = 1, x_4 = x_5 = 0$; $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$; $x_3 = x_4 = 0, x_5 = 1$. 我们得到 H 的三个线性无关的解:

$$\mathbf{w}_1 = (1,0,1,0,0)^t, \mathbf{w}_2 = (0,-1,0,1,0)^t, \mathbf{w}_3 = (-1,0,0,0,1)^t.$$

故 $\mathrm{sol}(L) = \mathbf{v} + \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$.

5 坐标空间之间的线性映射

5.1 定义和（与基底无关的）性质

定义 5.1 设 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 是映射. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y})}_{\text{保持加法}} \quad \text{和} \quad \underbrace{\phi(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\phi(\mathbf{x})}_{\text{保持数乘}},$$

则称 ϕ 是线性映射.

例 5.2 设

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{0}_m \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \psi: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x} \end{array}$$

是线性映射. 称 ϕ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的零映射, ψ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的恒同映射.

命题 5.3 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. 则下列结论等价:

(i) ϕ 线性,

(ii) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y})}_{\text{保持线性运算}}.$$

(iii) 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{x}_k) = \alpha_1\phi(\mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_k\phi(\mathbf{x}_k)}_{\text{保持线性组合}}.$$

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii) 设 ϕ 是线性的. 则

$$\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \phi(\alpha\mathbf{x}) + \phi(\beta\mathbf{y}) = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}).$$

故 ϕ 保持线性运算. 反之, 取 $\alpha = \beta = 1$ 得到 ϕ 保持加法, 取 $\beta = 0$ 得到 ϕ 保持数乘.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) 对 k 归纳. 当 $k = 1$ 时,

$$\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1) = \phi(\alpha_1\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_1) = \alpha_1\phi(\mathbf{x}_1) + 0\phi(\mathbf{x}_1) = \alpha_1\phi(\mathbf{x}_1).$$

当 $k=2$ 时, 结论是 (ii). 设 $k>2$ 且结论对 $k-1$ 成立. 则

$$\begin{aligned}
&\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1+\cdots+\alpha_{k-1}\mathbf{x}_{k-1}+\alpha_k\mathbf{x}_k)\\
=&\phi(\alpha_1\mathbf{x}_1+\cdots+\alpha_{k-1}\mathbf{x}_{k-1})+\alpha_k\phi(\mathbf{x}_k) && [k=2]\\
=&\alpha_1\phi(\mathbf{x}_1)+\cdots+\alpha_{k-1}\phi(\mathbf{x}_{k-1})+\alpha_k\phi(\mathbf{x}_k) && [\text{归纳假设}].
\end{aligned}$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) 令 $k=2$ 和 $\alpha_1=\alpha_2=1$ 可知, ϕ 保持加法. 令 $k=1$ 可知, ϕ 保持数乘. □

例 5.4 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 线性. 则 $\phi(\mathbf{0}_n)=\mathbf{0}_m$.

证明. 计算

$$\phi(\mathbf{0}_n)=\phi(\mathbf{0}_n+\mathbf{0}_n)=\phi(\mathbf{0}_n)+\phi(\mathbf{0}_n)\Longrightarrow\phi(\mathbf{0}_n)=\mathbf{0}_m. \quad \square$$

例 5.5 设 $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\psi_\lambda:\ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\
\mathbf{x} &\mapsto \lambda\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

是线性的. 称之为数乘映射. 当 λ=0 时, ψ_λ 是零映射. 当 λ=1 时, ψ_λ 是恒同映射.

例 5.6 设 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$.

$$\begin{aligned}
T_{\mathbf{v}}:\ \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n\\
\mathbf{x} &\mapsto \mathbf{v}+\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

不是线性的. 这是因为 $T_{\mathbf{v}}(\mathbf{0})=\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$.

命题 5.7 设 $\phi:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射.

(i) 如果 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in\mathbb{R}^n$ 线性相关, 则 $\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_k)$ 也线性相关.

(ii) 如果 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, 则 $\phi(U)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间. 特别地, $\mathrm{im}(\phi)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间, 且 $\dim(U)\geq\dim(\phi(U))$.

(iii) 如果 W 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间, 则 $\phi^{-1}(W)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 特别地, $\phi^{-1}(\{\mathbf{0}_m\})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

证明. (i) 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$, 不全为零, 使得 $\sum_{i=1}^k\alpha_i\mathbf{v}_i=\mathbf{0}_n$. 根据上一章命题 5.3,

$$\mathbf{0}_m=\phi(\mathbf{0}_n)=\phi\left(\sum_{i=1}^k\alpha_i\mathbf{v}_i\right)=\sum_{i=1}^k\alpha_i\phi(\mathbf{v}_i).$$

(ii) 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\phi(U)$. 则存在 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in U$ 使得 $\phi(\mathbf{u})=\mathbf{x}$ 和 $\phi(\mathbf{v})=\mathbf{y}$. 对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}&=\alpha\phi(\mathbf{u})+\beta\phi(\mathbf{v})\\&=\phi(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})\\&\in\phi(U)\quad(\text{命题 }1.17\text{ (ii)}).\end{aligned}$$

根据第二章第一讲命题 1.16, $\phi(U)$ 是子空间.

设 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_d$ 是 $\phi(U)$ 的一组基, 且 $\mathbf{w}_i=\phi(\mathbf{u}_i)$, 其中 $\mathbf{u}_i\in U$, $i=1,\ldots,d$. 因为 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_d$ 线性无关, 所以 (i)

蕴含 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ 线性无关. 利用基扩充可知 U 有一组基底包含 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$. 故 $\dim(U) \geq d$.

(iii) 对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \phi^{-1}(W), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们计算

$$\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}).$$

因为 $\phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y}) \in W$ 且 W 是子空间, 所以 $\alpha\phi(\mathbf{x}) + \beta\phi(\mathbf{y}) \in W$. 由此得出 $\phi(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \in W$. 从而, $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \phi^{-1}(W)$. □

例 5.8 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n+\ell}$ 且

$$\mathbf{w}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_j \\ \alpha_{n+1,j} \\ \vdots \\ \alpha_{n+\ell,j} \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha_{n+1,j}, \ldots, \alpha_{n+\ell,j} \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, k$. 证明: 如果 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 则 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ 线性无关.

证明. 设

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \mathbb{R}^{n+\ell} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+\ell} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{array}$$

则 ϕ 是线性映射. 因为 $\phi(\mathbf{w}_j) = \mathbf{v}_j$, $j = 1, \ldots, k$ 且 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以命题 *5.7 (i)* 蕴含 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k$ 线性无关. □

定义 5.9 设 $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 $\phi^{-1}(\{\mathbf{0}_m\})$ 称为 ϕ 的核 (kernel), 记为 $\ker(\phi)$. 坐标空间 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 $\mathrm{im}(\phi)$ 称为 ϕ 的像 (image).

例 5.10 设 ϕ 和 ψ 由例 *5.2* 给出. 则对零映射 ϕ, 我们有:

$$\ker(\phi) = \mathbb{R}^n \quad \text{和} \quad \mathrm{im}(\phi) = \{\mathbf{0}_m\}.$$

对恒同映射 ψ, 我们有:

$$\ker(\psi) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{和} \quad \mathrm{im}(\psi) = \mathbb{R}^n.$$

设 $\psi_\lambda: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 由例 *5.5* 给出. 则数乘映射 ψ_λ, 我们有: 当 $\lambda \neq 0$ 时,

$$\ker(\psi_\lambda) = \{\mathbf{0}\} \quad \text{和} \quad \mathrm{im}(\psi_\lambda) = \mathbb{R}^n.$$

当 $\lambda = 0$ 时, ψ_0 是零映射.

设 $\phi: \mathbb{R}^{n+k} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是例 *5.8* 中的投射. 则

$$\ker(\phi) = \langle \mathbf{e}_{n+1}, \ldots, \mathbf{e}_{n+k} \rangle \quad \text{和} \quad \mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}^n.$$

命题 5.11 设 $\phi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则 ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$.

证明. 设 ϕ 是单射. 根据上一章命题 5.3, $\phi(\mathbf{0}_n)=\mathbf{0}_m$. 因为 ϕ 是单射, 所以 $\ker(\phi)=\{\mathbf{0}_n\}$. 反之, 设 $\ker(\phi)=\{\mathbf{0}_n\}$. 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\phi(\mathbf{x})=\phi(\mathbf{y})$. 则

$$\phi(\mathbf{x}-\mathbf{y})=\phi(\mathbf{x})-\phi(\mathbf{y})=\mathbf{0}_m.$$

于是, $\mathbf{x}-\mathbf{y}\in\ker(\phi)$. 因为 $\ker(\phi)=\{\mathbf{0}_n\}$, 所以 $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{0}$. 故 $\mathbf{x}=\mathbf{y}$, 即 ϕ 是单射. □

例 5.12 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性单射. 证明: 如果 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in\mathbb{R}^n$ 线性无关, 则 $\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_k)$ 线性无关.

证明. 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1\phi(\mathbf{v}_1)+\cdots+\alpha_k\phi(\mathbf{v}_k)=\mathbf{0}_m.$$

则

$$\phi(\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k)=\mathbf{0}_m.$$

因为 ϕ 是单射, 所以 $\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}_n$. 因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以 $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$. 故 $\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_k)$ 线性无关. □

引理 5.13 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性映射, $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in\mathbb{R}^n$ 线性无关. 则 $\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_k)$ 线性无关当且仅当

$$\ker(\phi)\cap\langle\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\rangle=\{\mathbf{0}_n\}.$$

证明. 设 $\ker(\phi)\cap\langle \mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\rangle=\{\mathbf{0}_n\}$. 令 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ 使得

$$\alpha_1\phi(\mathbf{v}_1)+\cdots+\alpha_k\phi(\mathbf{v}_k)=\mathbf{0}_m.$$

则 $\phi(\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k)=\mathbf{0}_m$. 故

$$\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k\in\ker(\phi)\cap\langle \mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\rangle=\{\mathbf{0}_n\}.$$

于是, $\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}\implies\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$. 即 $\phi(\mathbf{v}_1),\cdots,\phi(\mathbf{v}_k)$ 线性无关.

反之, 设 $\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_k)$ 线性无关. 令

$$\mathbf{v}\in\ker(\phi)\cap\langle \mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\rangle.$$

则存在 $\beta_1,\ldots,\beta_k\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{v}=\beta_1\mathbf{v}_1+\cdots+\beta_k\mathbf{v}_k$. 故 $\mathbf{0}=\phi(\mathbf{v})=\beta_1\phi(\mathbf{v}_1)+\cdots+\beta_k\phi(\mathbf{v}_k)$. 由此可知,

$$\beta_1=\cdots=\beta_k=0.$$

从而得出 $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, 即 $\ker(\phi)\cap\langle \mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\rangle=\{\mathbf{0}_n\}$. □

定理 5.14 *(对偶定理, 线性映射版)* 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则

$$\dim(\ker(\phi))+\dim(\mathrm{im}(\phi))=n.$$

证明. 设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基. 由基扩充定理, $\mathbb{R}^n$ 有一组基 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d,\ \mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_n$.

断言. $\phi(\mathbf{v}_{d+1}),\ldots,\phi(\mathbf{v}_n)$ 是 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基.

断言的证明. 先验证 $\phi(\mathbf{v}_{d+1}),\ldots,\phi(\mathbf{v}_n)$ 线性无关. 引理 5.13, 只需验证

$$\ker(\phi)\cap\langle\mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_n\rangle=\{\mathbf{0}_n\}. \tag{2}$$

设 $\mathbf{x}\in\ker(\phi)\cap\langle\mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_n\rangle$. 则 $\exists\,\alpha_1,\ldots,\alpha_d,\beta_{d+1},\ldots,\beta_n\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots\alpha_d=\beta_{d+1}\mathbf{v}_{d+}+\cdots+\beta_n\mathbf{v}_n$. 因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d,\mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 线性无关, 所以 $\alpha_1=\cdots=\alpha_d=0$. 故 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 于是, (2) 成立.

再验证 $\mathrm{im}(\phi)=\langle\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_n)\rangle$. 因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 所以 $\mathrm{im}(\phi)=\langle\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_n)\rangle$ (上一讲命题 5.3 (iii)). 因为 $\phi(\mathbf{v}_1)=\cdots=\phi(\mathbf{v}_d)=\mathbf{0}_m$, 所以 $\mathrm{im}(\phi)=\langle\phi(\mathbf{v}_{d+1}),\ldots,\phi(\mathbf{v}_n)\rangle$. 断言成立.

由断言可知 $\dim(\mathrm{im}(\phi))=n-d$. □

推论 5.15 设 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是线性映射. 如果 ϕ 是双射, 则 $\phi^{-1}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ 是线性映射且 $m=n$.

证明. 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^m$. 因为 ϕ 是满射, 所以存在 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{x}=\phi(\mathbf{u})$ 和 $\mathbf{y}=\phi(\mathbf{v})$. 因为

$$\phi(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})=\alpha\phi(\mathbf{u})+\beta\phi(\mathbf{v})=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y},$$

所以

$$\phi^{-1}(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y})=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}=\alpha\phi^{-1}(\mathbf{x})+\beta\phi^{-1}(\mathbf{y}).$$

故 ϕ^{-1} 线性.

因为 ϕ 是双射, 所以 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$ (命题 5.11) 和 $\mathbb{R}^m = \mathrm{im}(\phi)$. 由对偶定理可知 $m = n$. □

推论 5.16 设 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是线性映射. 则下列断言等价

(i) ϕ 是单射,

(ii) ϕ 是满射,

(iii) ϕ 是双射.

证明. (i) $\Rightarrow$ (ii): 因为 ϕ 单, 所以 $\dim(\ker(\phi)) = 0$. 故 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$ (对偶定理). 故 $\mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}^n$, 即 ϕ 是满射.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): 因为 ϕ 满, 所以 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$. 故 $\dim(\ker(\phi)) = 0$ (对偶定理). 故 ϕ 单 (命题 5.11), 即 ϕ 是双射.

(iii) $\Rightarrow$ (i): 显然. □

命题 5.17 设 $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ 和 $\phi : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$ 都是线性映射 则 $\phi \circ \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 也是线性映射.

证明.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\phi\circ\psi"] & \mathbb{R}^s \arrow[d, "\phi"] \\ & \mathbb{R}^m. \end{tikzcd}$$

设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. 我们计算

$$\phi\circ\psi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \phi(\alpha\psi(\mathbf{x})+\beta\psi(\mathbf{y})) = \alpha\phi\circ\psi(\mathbf{x})+\beta\phi\circ\psi(\mathbf{y}). \quad \square$$