

第二章 矩阵

以下引理是建立维数概念的关键.

引理 1.14 (线性组合引理) 设 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k; \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell$ 是 \mathbb{R}^n 中的两组向量. 设对任意 $j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$, \mathbf{w}_j 是 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ 的线性组合. 如果 $\ell > k$, 则 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell$ 线性相关.

证明. 设 $\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^k \alpha_{i,j} \mathbf{v}_i$, 其中 $\alpha_{i,j} \in \mathbb{R}, j \in \{1, 2, \dots, \ell\}$. 再设 $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ 是待定的实数. 则

$$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^k \alpha_{i,j} \mathbf{v}_i \right) \quad (1)$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^k (\lambda_j \alpha_{i,j}) \mathbf{v}_i \quad (\text{分配律和结合律}) \quad (2)$$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\ell} (\lambda_j \alpha_{i,j}) \mathbf{v}_i \quad (\text{和号互换}) \quad (3)$$

$$= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \alpha_{i,j} \right) \mathbf{v}_i \quad (\text{分配律}) \quad (4)$$

考虑以 $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ 为未知数的齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \alpha_{i,j} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

根据 $\ell > k$ 和第一章第一讲推论 2.8 (红色推论), 上述方程组有非零解 $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$. 由 (4) 可知, $\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \mathbf{w}_j = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_\ell$ 线性相关. \square

1.3 坐标空间中的子空间

定义 1.15 设 U 是 \mathbb{R}^n 中的非空子集. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$,

(i) (加法封闭性) $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$,

(ii) (数乘封闭性) $\alpha \mathbf{x} \in U$.

则称 U 是 \mathbb{R}^n 中的子空间 (*subspace*).

例 1.16 坐标空间 \mathbb{R}^n 有两个平凡子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 和 \mathbb{R}^n .

例 1.17 设 U 是 \mathbb{R}^n 的子空间. 则 $\mathbf{0} \in U$.

证明. 设 $\mathbf{x} \in U$. 则 $\mathbf{0} = 0\mathbf{x} \in U$. \square

1.3.1 基本性质

命题 1.18 设 U 是 \mathbb{R}^n 中的非空子集. 则下列命题等价.

(i) U 是子空间;

(ii) U 中任意两个向量的线性组合仍在 U 中;

(iii) 对任意 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in U$, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ 的任意线性组合都在 U 中.

证明. “(i) \implies (ii)” 设 \mathbf{x}, \mathbf{y} 是 U 中任意的两个向量, α, β 是任意两个实数. 如果 U 是子空间, 则 $\alpha \mathbf{x}, \beta \mathbf{y} \in U$ (数

乘封闭性). 从而 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U$ (加法封闭性). 反之, 设 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U$. 取 $\alpha = \beta = 1$ 得到加法封闭性, 取 $\beta = 0$ 得到数乘封闭性. 故 U 是子空间.

“(ii) \implies (iii)” 当 $k = 1, 2$ 时, (ii) 蕴含 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 的所有线性组合都在 U 中. 设 $k > 2$ 时且 U 中任何 $k - 1$ 个向量的线性组合都在 U 中. 对任意 $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{u}_k \in U$, 我们有

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i = \left(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \mathbf{u}_i \right) + \alpha_k \mathbf{u}_k \in U.$$

“(iii) \implies (i)” 由线性组合的定义直接得出. \square

例 1.19 设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. 则 $\{\lambda\mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ 是子空间.

设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. 则 $\{\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ 是子空间.

例 1.20 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 其对应的 n 元齐次线性方程组记为 H . 验证 $\text{sol}(H)$ 是 \mathbb{R}^n 中的子空间.

证明. (参照见第一次作业习题 4) 设

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

是 H 的两个解. 则

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_n \vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m, \quad \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \beta_n \vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m.$$

令 λ, μ 是两个实数, $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$. 则

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n \end{pmatrix}.$$

而

$$\sum_{j=1}^n (\lambda\alpha_j + \mu\beta_j) \vec{A}^{(j)} = \lambda \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \vec{A}^{(j)} \right) + \mu \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \vec{A}^{(j)} \right) = \mathbf{0}_m.$$

故 $\mathbf{u} \in \text{sol}(H)$. 根据命题 1.18, $\text{sol}(H)$ 是子空间. \square

例 1.21 设 $p, q \in \mathbb{Q}$ 不全为零,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid p\alpha + q\beta = 0, \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}.$$

S 是否是 \mathbb{R}^n 的子空间?

答. 不是. 因为

$$\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \in S \quad \text{但} \quad \sqrt{2} \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \notin S. \quad \square$$

1.3.2 子空间的交与和

命题 1.22 设 Λ 是一个指标集, 对任意 $\lambda \in \Lambda$, U_λ 是 \mathbb{R}^n 中的子空间. 则 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ 也是子空间.

证明. 设 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 因为 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U_\lambda$, 所以 $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in U_\lambda$ (命题 1.18). 由此可知, $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. 故 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ 是子空间 (命题 1.18). \square

例 1.23 考虑齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

设 $V_i = \text{sol}(a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = 0)$, $i = 1, 2, \dots, m$. 则 $\text{sol}(H) = \bigcap_{i=1}^m V_i$. \square

设 S_1, \dots, S_k 是 \mathbb{R}^n 的非空子集. 我们定义 S_1, \dots, S_k 的和为

$$S_1 + \cdots + S_k := \{\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k \mid \mathbf{v}_1 \in S_1, \dots, \mathbf{v}_k \in S_k\}.$$

命题 1.24 设 U_1, \dots, U_k 是 \mathbb{R}^n 的子空间. 则 $U_1 + \cdots + U_k$ 也是子空间.

证明. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \sum_{i=1}^k U_i$. 则存在 $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in U_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, 使得 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i$ 和 $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i$. 则对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \alpha \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i \right) + \beta \left(\sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^k (\alpha\mathbf{u}_i + \beta\mathbf{v}_i).$$

根据命题 1.18, $\alpha\mathbf{u}_i + \beta\mathbf{v}_i \in U_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. 我们得到 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \sum_{i=1}^k U_i$. 故 $\sum_{i=1}^k U_i$ 是子空间. \square

例 1.25 设 U_1, \dots, U_k 是 \mathbb{R}^n 的子空间. 证明

$$U_i \subset U_1 + \dots + U_k, \quad i = 1, \dots, k.$$

证明. 不妨证明 $U_1 \subset U_1 + \dots + U_k$. 注意到

$$U_1 = \{ \mathbf{u}_1 + \underbrace{\mathbf{0} + \dots + \mathbf{0}}_{k-1} \mid \mathbf{u}_1 \in U_1 \} \subset U_1 + \dots + U_k. \quad \square$$

例 1.26 设 U, V 是 \mathbb{R}^n 的子空间. 如果 $U \not\subset V$ 且 $V \not\subset U$, 则 $U \cup V$ 不是子空间.

证明. 假设 $U \cup V$ 是子空间. 设 $\mathbf{x} \in U \setminus V$ 和 $\mathbf{y} \in V \setminus U$. 则 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U \cup V$. 不妨设 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$. 则

$$\mathbf{y} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{x} \in U.$$

矛盾. \square

1.3.3 线性流形

定义 1.27 设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 和 U 是 \mathbb{R}^n 的子空间. 则 $\{\mathbf{v}\} + U$ 简记为 $\mathbf{v} + U$. 称为一个线性流形.

例 1.28 设 $B \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$, L 是 B 对应的 n 元线性方程组, H 是 B 的前 n 列组成矩阵对应的齐次线性方程组. 如果 L 相容, 则 $\text{sol}(L) = \mathbf{v} + \text{sol}(H)$, 其中 \mathbf{v} 是 L 的一个解. 特别地, $\text{sol}(L)$ 是线性流形.

证明. 设 $M = \mathbf{v} + \text{sol}(H)$ 且 $\mathbf{w} \in M$. 则存在 $\mathbf{z} \in \text{sol}(H)$ 使得 $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{z}$. 令

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

则

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 + z_1 \\ \vdots \\ v_n + z_n \end{pmatrix}.$$

我们计算

$$\sum_{i=1}^n (v_i + z_i) \vec{B}^{(i)} = \sum_{i=1}^n v_i \vec{B}^{(i)} + \sum_{i=1}^n z_i \vec{B}^{(i)} = \vec{B}^{(n+1)}.$$

于是, $\mathbf{w} \in \text{sol}(L)$. 由此可知, $M \subset \text{sol}(L)$. 再设:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \text{sol}(L).$$

则 $\mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} - \mathbf{v})$. 我们计算

$$\sum_{i=1}^n (w_i - v_i) \vec{B}^{(i)} = \sum_{i=1}^n w_i \vec{B}^{(i)} - \sum_{i=1}^n v_i \vec{B}^{(i)} = \vec{B}^{(n+1)} - \vec{B}^{(n+1)} = \mathbf{0}_m.$$

故 $\mathbf{w} - \mathbf{v} \in \text{sol}(H)$. 我们有 $\text{sol}(L) \subset M$. 故 $\text{sol}(L) = M$.

再根据上一讲例 1.18, $\text{sol}(L)$ 是线性流形. \square

引理 1.29 设线性流形 $M = \mathbf{x} + U = \mathbf{y} + V$, 其中 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, U, V 是 \mathbb{R}^n 的子空间. 则 $U = V$ 且 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U$.

证明. 因为 $\mathbf{x} + \mathbf{0} \in M$, 所以存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{v}$. 于是, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in V$. 类似可知 $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in U$. 我们得到

$$\pm(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in U \cap V. \quad (5)$$

设 $\mathbf{u} \in U$. 则 $\mathbf{x} + \mathbf{u} \in M$. 于是, 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得

$$\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{y} + \mathbf{v}.$$

由 (5) 可知, $\mathbf{u} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mathbf{v}$. 故 $\mathbf{u} \in V$. 我们得到 $U \subset V$. 同理 $V \subset U$. 故 $U = V$. 进而, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U \cap V = U$. \square

设线性流形 $M = \mathbf{x} + U$, 其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 U 是 \mathbb{R}^n 的子空间. 我们称 U 是 M 的方向.

注解 1.30 一个线性流形是子空间当且仅当它含有零向量. 这是因为该流形可以写成零向量和它的方向之和.