第一章　预备知识

1　代数的起源

代数起源于解方程.

1.1　线性方程(组)

设 $\mathbb{R}$ 是实数集合, $a, b \in \mathbb{R}$. 计算 $x \in \mathbb{R}$ 使得

$$ax = b.$$

(i) $a \neq 0$, 唯一解; 轨迹是实轴上一个点.

(ii) $a = 0$, $b \neq 0$, 无解.

(iii) $a = b = 0$, 不止一个解; 轨迹是整个实轴.

设 $a, b, c \in \mathbb{R}$. 求 $x, y \in \mathbb{R}$ 使得

$$ax + by = c.$$

(i) a, b 不全为零, 不止一个解; 轨迹是实平面上的一条直线.

(ii) $a = b = 0$, $c \neq 0$, 无解.

(iii) $a = b = c = 0$, 不止一个解; 轨迹是整个实平面.

设 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$. 求实数 $x, y \in \mathbb{R}$ 使得

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}.$$

(i) 唯一解, 轨迹是实平面上两条不平行直线的交点.

(ii) 无解.

(iii) 不止一个解, 两条重合的直线或实平面.

设 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 求实数 $x, y, z \in \mathbb{R}$ 使得

$$ax + by + cz = d.$$

说服自己当 a, b, c 不全为零时, 上述方程代表三维实空间的一张平面.

一般的实系数线性方程组表述如下:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}. \tag{1}$$

它有 n 个未知数和 m 个方程.

下面我们引入矩阵来简洁地表示线性方程组. 实数上

的 m 行 n 列的矩阵($m \times n$ 的矩阵)是指

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

对 $i = 1, 2, \ldots, m$, A 的第 i 行(向量)是 $(a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$, 记为 $\vec{A}_i$. 对 $j = 1, 2, \ldots, n$, A 的第 j 列(向量)是

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}.$$

记为 $\vec{A}^{(j)}$. (2) 中的矩阵可简记为 $(a_{i,j})_{m \times n}$.

注解 1.1 我们用 $O_{m \times n}$ 代表由 m 行和 n 列个 0 组成的矩阵, 称为 $m \times n$ 阶零矩阵.

例 1.2 设矩阵 A 由 (2) 给出. 则对 $i = 1, 2, \ldots, m$, $\vec{A}_i$ 是 *1* 行 n 列的矩阵. 对 $j = 1, 2, \ldots, n$, $\vec{A}^{(j)}$ 是 m 行 1 列的矩阵. 特别地, 每个实数都是一行一列的矩阵.

矩阵 (2) 称为方程组 (1) 的 系数矩阵. 而矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

称为 (1) 的 增广矩阵. (1) 称为以 B 为增广矩阵的 关于 $x_1,\ldots,x_n$ 的线性方程组. 如果我们说 B 是一个线性方程组的增广矩阵, 则该方程组是指 (1).

设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$a_{i,1}\alpha_1+\cdots+a_{i,n}\alpha_n=b_i,\quad i=1,\ldots,m.$$

则称列向量

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

是 (1) 的一个解.

例 1.3 写出线性方程组:

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=0 \\ y-z=0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

写出该方程对应的系数矩阵和增广矩阵.

解. 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

增广矩阵是

$$\begin{pmatrix} & | & 0 \\ A & | & 0 \\ & | & 1 \end{pmatrix}.$$

定义 1.4 如果 (1) 有解, 则称它是 相容的 *(compatible)*. 否则称之为 不相容的. *(incompatible)*. 设 (1) 相容. 如果它的解唯一, 则称之为确定的 *(deterministic)*. 否则称之为不确定的 *(non-deterministic)*.

如果矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0\cdots0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\cdots0 \end{pmatrix},$$

其中 $\bullet$ 代表非零实数, $*$ 代表任意实数, 则称 A 是阶梯型矩阵. 特别地, 仅由零组成的矩阵是阶梯型的.

引理 1.5 利用上述符号. 设

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & \downarrow\ell_1 & & & & \downarrow\ell_2 & & & & \downarrow\ell_k & & & & \end{matrix} \\
M = & \begin{pmatrix}
0\cdots0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & *
\end{pmatrix}
\end{array}$$

是 $k\times(n+1)$ 的阶梯型矩阵, 其中每一行都是非零行. 设以 M 为增广矩阵的线性方程组为 *(E).*

(i) (E) 相容当且仅当 $\ell_k < n+1$;

(ii) (E) 确定当且仅当 $\ell_k < n+1$ 且 $k = n$.

证明. (i) 设 (E) 相容. 假如 $\ell_k = n+1$. 则 (E) 中第 k 个方程具有形式 $0 = \bullet$, 无解. 从而我们得到矛盾.

反之, 设 $\ell_k < n+1$. 我们对 n 用归纳法证明以下两个结论:

(a) 如果 $k < n$, 则 (E) 不确定;

(b) 如果 $k = n$, 则 (E) 确定.

设 $n = 1$. 则 $k < n$ 不可能成立. 如果 $k = 1$, 则 (E) 只有一个方程, 其形式为

$$\bullet\, x = *.$$

故 (E) 有唯一解.

设 $n=2$. 如果 $k=1$, 则 (E) 只有一个方程, 其形式为

$$\bullet x + * y = * \quad \text{或} \quad 0x + \bullet y = *.$$

故 (E) 不确定. 如果 $k=2$, 则 (E) 为

$$\begin{cases} \bullet x + * y = * \\ \qquad \bullet y = * \end{cases}$$

由第二个方程求得唯一解 $y=\beta$. 代入第一个方程得

$$\bullet x = * - * \beta.$$

得出唯一解 $x=\alpha$. 故

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ 是 (E) 的唯一解.}$$

结论 (a) 和 (b) 对 $n=2$ 成立.

设 $n>2$ 且两个结论对 $n-1$ 成立. 如果 $k=1$, 则 (E) 有只有一个非平凡方程, 它具有形式

$$\bullet x_{\ell_1} + * x_{\ell_1+1} + \cdots + * x_n = *$$

故结论 (a) 和 (b) 都成立.

设 $k>1$ 且 N 是去掉 M 中第一行和第 ℓ_1 列的矩阵. 则 N 是 $(k-1)\times n$ 的阶梯型矩阵, 且 M 中的第 ℓ_k 列是

N 中第 $\ell_k - 1$ 列. 设 N 对应的线性方程组是 (F). 如果 $k-1 < n-1$, 则归纳假设蕴含 (F) 有两个不同的解. 设它们分别为

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_1-1} \\ \alpha_{\ell_1+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{\ell_1-1} \\ \beta_{\ell_1+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

带入 (E) 中第一个方程得

$$\bullet\, x_{\ell_1} = * - * \, \alpha_{\ell_1+1} - \cdots - * \, \alpha_n \quad \text{和} \quad \bullet\, x_{\ell_1} = * - * \, \beta_{\ell_1+1} - \cdots - * \, \beta_n.$$

设这两个方程的解分别是 α_{ℓ_1} 和 β_{ℓ_1}. 则 (E) 有两个不同解

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_1-1} \\ \alpha_{\ell_1} \\ \alpha_{\ell_1+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{\ell_1-1} \\ \beta_{\ell_1} \\ \beta_{\ell_1+1} \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

结论 (a) 成立.

设 $k-1 = n-1$. 由归纳假设可知, (F) 由唯一解. 把

该解带入 (E) 中的第一个方程得到 (E) 的唯一解. 结论 (b) 成立. 由结论 (a) 可知, (i) 成立.

(ii) 设 $\ell_k = n$ 且 $k = n$. 由结论 (b) 可知, (E) 确定. 设 (E) 确定. 则由结论 (i) 可知, $\ell_k < n+1$. 再由结论 (a) 可知, $k = n$. $\square$

1.2 高次方程(组)

设 a, b, c 是实数且 $a \neq 0$. 求 x 使得

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

令

$$x = y - \frac{b}{2a}.$$

代入等价方程

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= \left(y - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b}{a}\left(y - \frac{b}{2a}\right) + \frac{c}{a} \\
&= y^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\
&\Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}$$

注解 1.6 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 一元二次方程没有实数解.

设 a,b,c,d 是实数且 $a\neq 0$. 求 x 使得

$$ax^3+bx^2+cx+d=0. \tag{3}$$

令

$$x=y-\frac{b}{3a}.$$

将 y 代入等价于 (3) 的方程

$$x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$$

得

$$\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{b}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2+\frac{c}{a}\left(y-\frac{b}{3a}\right)+\frac{d}{a}=0.$$

化简后, 我们有

$$y^3+py+q=0, \tag{4}$$

其中 p,q 是实数.

注解 1.7 设

$$f(x)=x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1}+\cdots+\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_0}{a_n}.$$

令

$$x=y-\frac{a_{n-1}}{na_n}$$

并代入 $f(x)$ 得到 n 次多项式 $g(y)$. 该多项式的次高项的系数等于零.

为了求解 (4), 令

$$y = z - \frac{p}{3z}. \tag{5}$$

代入 (4) 得

$$\left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0.$$

展开后, 我们有:

$$z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0.$$

化简得

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{6}$$

通过这个方程求出 z^3, 再通过开立方求得 y, 然后得到 x. 由此可知我们可以通过有理运算(加、减、乘、除), 开平方和开立方求出一元三次方程的根. 变换 (5) 是非平凡的, (6) 称为 (3) 的预解式 (resolvent).

一元四次方程可以通过有理运算、开平方、开立方和开四次方求解. 其核心技巧也是构造预解式. 但 Abel 和 Galois 证明了一元五次方程不可能通过有理运算和开方求解。特别地, Galois 的证明催生了一门新的数学分支: 抽象代数.

求解多元高次代数方程组是代数几何的起源. 总之, 代数是可以操作的几何, 几何是可以描绘的代数.

2 线性方程组初步

设 (L) 和 (L') 是两个实系数 n 元线性方程组. 如果或者 (L) 和 (L') 都不相容, 或者 (L) 和 (L') 有相同的解, 则称它们是等价的. 本节的目的是把一个线性方程组化为一个等价的线性方程组, 而后者的相容性和确定性是容易判断的.

2.1 矩阵的初等行变换

设 $A = (a_{i,j})_{m\times n}$ 是 $m \times n$ 的实矩阵, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

(i) 把 A 中第 i 行和第 j 行互换位置得到矩阵 A'. 则称 A' 是通过第 I 类初等行变换由 A 得到的. 此时 A' 的第 i 行和第 j 行分别是

$$(a_{j,1}, \ldots, a_{j,n}) \quad \text{和} \quad (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}).$$

其它行与 A 相同.

(ii) 设 $i \ne j$, α 是实数. 把 A 的 第 i 行通乘 α 后加到第 j 行上得到矩阵 A'. 则称 A' 是通过第 II 类初等行变换由 A 得到的. 时 A' 的第 j 行是

$$(\alpha a_{i,1} + a_{j,1}, \ldots, \alpha a_{i,n} + a_{j,n}).$$

其它行与 A 相同.

(iii) 设 α 是非零实数. 把 A 的 第 i 行通乘 α 得到矩阵 A'. 则称 A' 是通过第 *III* 类初等行变换由 A 得到的. 时 A' 的第 i 行是

$$(\alpha a_{i,1}, \ldots, \alpha a_{i,n}).$$

其它行与 A 相同.

I、II、III 类初等行变换统称初等行变换.

引理 2.1 *设 n 元线性方程组 (L) 的增广矩阵是 B, 对 B 进行一次初等行变换得到矩阵 B'. 再设 B' 对应的线性方程组是 (L'). 则两方程组等价.*

证明. 当 B' 是通过第 I 类初等行变换由 B 得到的. 则 (L') 是把 L 中两个方程互换位置得到的方程组. 于是, (L) 和 (L') 显然等价. 当 B' 是通过第 III 类初等行变换由 B 得到的. 则 (L') 是把 L 中某个方程通乘一个非零实数得到的方程组. 于是, 两方程组等价.

下面我们考虑第二类初等变换. 设

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

则 (L) 是

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}.$$

而 (L')是

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i \\ \vdots \\ (\alpha a_{i,1} + a_{j,1})x_1 + (\alpha a_{i,2} + a_{j,2})x_2 + \cdots + (\alpha a_{i,n} + a_{j,n})x_n = \alpha b_i + b_j \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}.$$

下面我们来证明 (L) 和 (L') 同解. 设

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 \\ x_2 = \beta_2 \\ \vdots \\ x_n = \beta_n \end{cases} \tag{7}$$

是 L 的一个解. 代入 (L') 的第 j 个方程得

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{i,k}+a_{j,k})\beta_k=\alpha\sum_{k=1}^{k}a_{i,k}\beta_k+\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}\beta_k=\alpha b_i+b_j.$$

注意到 (L) 和 (L') 只有第 j 个方程不同. 故 (7) 是 (L') 的解.

反之, 设 (7) 是 (L') 的解. 方程组 (L) 中只有第 j 个方程与 (L') 中不一样, 把解代入该方程得:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_{j,k}\beta_k&=\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{i,k}+a_{j,k}-\alpha a_{i,k})\beta_k\\&=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{i,k}+a_{j,k})\beta_k}_{L'\text{ 中第 } j \text{ 个方程}}-\alpha\underbrace{\sum_{k=1}^{k}a_{i,k}\beta_k}_{L'\text{ 中第 } i \text{ 个方程}}\\&\overset{\because\, j\neq i}{=}\alpha b_i+b_j-\alpha b_i=b_j.\end{aligned}$$

故 (7) 也是 (L) 的解. □

命题 2.2 *设 n 元线性方程组 (L) 的增广矩阵是 B, 对 B 进行有限次初等行变换得到矩阵 B'. 再设 B' 对应的线性方程组是 (L'). 则两方程组等价.*

证明. 有限次利用引理 2.1 即得. □

2.2 Gauss 消去法 (矩阵版)

命题 2.3 *设 A 是 $m\times n$ 的实矩阵. 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们可以把 A 化为一个阶梯型矩阵.*

证明. 设 A 不是零矩阵. 我们对 m 归纳. 当 $m=1$ 时, A 本身是阶梯型的. 故命题成立. 设 $m>1$ 且命题对 $m-1$ 成立. 设 ℓ 列是 A 中第一个含有非零数的列, 其中一个非零数等于 a 并出现在第 k 行. 我们把第一行和第 k 行对调得到矩阵

$$B=\begin{array}{c}\begin{matrix} & \downarrow^{\ell} & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 0\cdots0 & a & *\cdots* \\ 0\cdots0 & b_2 & *\cdots* \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots0 & b_m & *\cdots* \end{pmatrix}\end{array},$$

其中 $b_2,\ldots,b_m$ 是实数. 把第一行通乘 $-b_2a^{-1}$ 加到第二行上得

$$C=\begin{array}{c}\begin{matrix} & \downarrow^{\ell} & \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} 0\cdots0 & a & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & *\cdots* \\ 0\cdots0 & b_3 & *\cdots* \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots0 & b_m & *\cdots* \end{pmatrix}\end{array},$$

类似地, 我们把第一行通乘 $-b_ia^{-1}$ 加到第 i 行上, $i=$

$3, 4, \ldots, m$ 得

$$D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \downarrow^{\ell} & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0\cdots0 & a & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & *\cdots* \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & *\cdots* \end{pmatrix} \end{array}.$$

设 D' 是由 D 中第二行、第三行、$\ldots$, 第 m 行组成得矩阵. 则 D' 有 $m-1$ 行.

根据归纳假设, 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们可以把 D' 化为一个阶梯型矩阵 D'', 其中前 ℓ 列中得元素都等于零. 而对 D' 做初等行变换相当于对 D 做初等行变换. 于是, 通过有限次第 I 类和第 II 类初等行变换, 我们把 D 化为阶梯矩阵

$$\begin{pmatrix} 0\cdots0 \ a \ *\cdots* \\ D'' \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 2.4 利用初等行变换把矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

化为阶梯型.

解.

$$A \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-\frac{8}{3}r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

2.3 相容性和确定性的判定

设 (L) 是一个 n 元线性方程组, 其系数矩阵为 A, 增广矩阵为 $B=(A|\mathbf{b})$. 由命题 2.3 我们可以对 B 做有限次初等行变换把 A 化为阶梯型，从而得到矩阵

$$D=(C|\mathbf{d}) \begin{pmatrix} 0\cdots 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & **\cdots * & d_1 \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & **\cdots * & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet *\cdots * & d_k \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\,0\cdots\ 0 & d_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\,0\cdots\ 0 & d_m \end{pmatrix},$$

定理 2.5 利用上述记号. 我们有

(i) (L) 相容当且仅当 $d_{k+1}=\cdots=d_m=0$;

(ii) (L) 确定当且仅当 $d_{k+1}=\cdots=d_m=0$ 且 $k=n$.

证明. 设 (L') 是以 D 为增广矩阵的 n 元线性方程组. 由命

题 2.2, (L') 与 (L) 等价. 于是, 我们只要对 (L') 讨论其相容性和确定性即可.

(i) 如果 $d_{k+1}, \ldots, d_m$ 不全为零, 则 (L') 中含有矛盾方程, 故不相容. 设 d_{k+1}, ..., d_m 都等于零. 由引理 1.5 可知 (L') 相容.

(ii) 如果 $d_{k+1} = \cdots = d_m = 0$ 且 $k = n$. 由引理 1.5 (ii) 可知, (L') 确定.

反之, 设 (L') 确定. 由 (i) 可知 $d_{k+1} = \cdots = d_m = 0$. 如果 $k < n$, 则引理 1.5 (i) 蕴含 (L') 不确定. 矛盾. □

注解 2.6 *当 $m < n$ 时, (E) 或者不相容或者不确定.*

例 2.7 *下面两个方程组 L_B 和 L_C 分别由增广矩阵 B 和 C 确定:*

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

判断 L_B 和 L_C 的相容性和确定性

解. 对 B 做初等行变换把 L_B 的系数矩阵化为阶梯型得

$$B \xrightarrow{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 - \frac{8}{3} r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

根据定理 *2.5*, L_B 不相容.

通过对 C 做初等行变换把 L_C 的系数矩阵化为阶梯型得

$$C \xrightarrow{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-3r_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据定理 *2.5*, L_C 相容但不确定. □

2.4 齐次线性方程组

实系数线性方程组 (H)

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}.$$

称为 齐次 线性方程组. 显然, H 由它的系数矩阵唯一确定且 $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$ 是它的一个解. 称之为 H 的平凡解或零解. 故 H 必然相容.

定理 2.8 齐次线性方程组 *(H)* 有非平凡解当且仅当其系

数矩阵可以通过第 *I, II* 类初等行变换化为

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\cdots0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & *\cdots* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & *\cdots* \end{pmatrix}_{k\times n} \\ O_{(m-k)\times n} \end{pmatrix}$$

其中 $\bullet$ *代表非零实数,* $*$ *代表任意实数, 而* $k < n$.

证明. 根据定理 2.5, (H) 不确定当且仅当它的增广矩阵可通过第 I, II 类初等行变换化为

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0\cdots0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & *\cdots* & 0 \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & *\cdots* & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & *\cdots* & 0 \end{pmatrix}_{k\times(n+1)} \\ O_{(m-k)\times(n+1)} \end{pmatrix}$$

且 $k < n$. □

由此我们得到一个重要的结论.

推论 2.9 *设齐次线性方程组 (H) 中* $m < n$. *则该方程组有非平凡解.*

证明. 设通过第 I, II 类初等行变换把该方程组的系数矩阵化为的阶梯型有 k 个非零行. 则 $k \le m < n$. 由定理 2.8, 该方程组必有非平凡解. □