

2025年春季学期第九周作业

1. 设: $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < 4\}$. 再设:

$$\begin{array}{ccc} \sigma: V & \longrightarrow & V \\ p(x) & \mapsto & p(x+h) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{ccc} \Delta: V & \longrightarrow & V \\ p(x) & \mapsto & p(x+h) - p(x) \end{array},$$

其中, h 是某个固定的实数.

- (i) 证明: σ 和 Δ 是 V 上的线性算子.
 - (ii) 计算: σ 和 Δ 在基底 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵.
 - (iii) 计算 $\ker(\sigma)$ 和 $\ker(\Delta)$ 的维数.
2. 设 A 可逆, 证明: AB 与 BA 相似. 当 A, B 都不可逆时, AB 与 BA 是否一定相似? 请说明理由.
3. 设 $\mathbb{R}^2$ 的线性算子 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1 = (1, 0)^t, \alpha_2 = (0, -1)^t$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, 线性算子 $\mathcal{B}$ 在基 $\beta_1 = (0, 1)^t, \beta_2 = (1, 1)^t$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. 求线性算子 $\mathcal{A} + \mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}\mathcal{A}$ 在基 β_1, β_2 下的矩阵.
4. 设 $\dim V = n$, $\mathcal{A}$ 为 V 上的线性算子. 证明下列等价:
- (i) $\mathcal{A} \in \langle \mathcal{E}_V \rangle$ (恒同算子 $\mathcal{E}_V$ 在 $\mathcal{L}(V)$ 中生成的线性子空间).
 - (ii) $\forall \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V), \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.
 - (iii) $\mathcal{A}$ 在任意基下的矩阵都相同.
5. (选做) 设 $A, B \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 都正定. 证明: AB 相似于一个正定矩阵.