2025年春季学期第八周作业

1. 设 $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_2(\mathbb{R})$.

   (1) 是否存在 $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ 使得 $S = P^t P$? 如果存在, 计算这样的矩阵 P;

   (2) 是否存在 $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ 使得 $S = P^t P$? 如果存在, 计算这样的矩阵 P.

2. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 且 $\det(A) < 0$. 证明: 存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x} < 0$.

3. 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明: 对于任意的 $m \in \mathbb{Z}$, A^m 正定.

4. 求实函数 $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{x} + a$ 的最小值, 其中 A 是 n 阶正定实对称方阵, $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \ldots, a_n)$ 是 n 维实行向量, a 是实数.

5. 设 $B \in \mathrm{SM}_{n-1}(\mathbb{R})$ 正定. $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$ 且 $a \in \mathbb{R}$, 令

$$A = \begin{pmatrix} B & \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v^t} & a \end{pmatrix}.$$

   证明: 如果 $\det(A) = 0$, 则 A 半正定.