2025年春季学期第七周作业

1. 验证实矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的所有顺序主子式都非负. 问该矩阵是否半正定?

2. 设实二次型为 $q(x,y,z) = \lambda(x^2+y^2+z^2) + 3y^2 - 4xy - 2xz + 4yz$, 问:

   (1) λ 取什么值时二次型矩阵 q 为正定矩阵.

   (2) λ 取什么值时二次型矩阵 q 为半负定矩阵.

   (3) λ 取什么值时二次型矩阵 q 为实一次多项式的完全平方.

3. (i) 证明: 半正定矩阵的行列式非负.

   (ii) 设 $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, 证明

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{pmatrix}$$

   半正定, 并以此证明 Cauchy 不等式.

4. 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 如果 A 正定, ϵ 是充分小的实数. 证明: 方阵 $A + \epsilon B$ 是正定的.

5. 设 q 是 V 上的二次型, $U \subset V$ 是非零子空间,

$$q_U: \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \mathbf{u} & \mapsto & q(\mathbf{u}) \end{array}.$$

   (i) 验证: q_U 是 U 上的二次型

   (ii) 设 q 的签名是 (k,l), q_U 的签名是 (s,t). 证明: $k \geq s$ 且 $l \geq t$.