

# 2025年春季学期第六周作业

1. 设  $V$  是域  $F$  上的有限维线性空间,  $g, h \in V^*$ . 函数  $f: V \times V \rightarrow F$  由公式

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

定义.

- (i) 验证  $f(x, y)$  是双线性型;
  - (ii) 计算  $\text{rank}(f)$ ;
  - (iii) 验证  $q(x) = g(x)^2$  是  $V$  上的二次型.
2. 设  $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_3x_2 + 10x_4x_3 - 2x_4^2$  是  $\mathbb{Q}^4$  上的二次型. 计算  $q$  在标准基下的矩阵和  $\text{rank}(q)$ .
3. 设  $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$  是  $\mathbb{R}^3$  上的二次型. 计算  $q$  的一组规范基和在该基下的规范型, 并求出  $q$  的签名.
4. 设

$$\begin{aligned} q: M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \text{tr}(X^t X). \end{aligned}$$

证明  $q$  是  $M_n(\mathbb{R})$  上的二次型并求  $q$  的签名.

5. 设  $q$  是  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  中非零齐二次多项式. 证明  $q$  在  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  中可约当且仅当  $\text{rank}(q) \leq 1$  或者  $q$  的签名是  $(1, 1)$ .