# 2025年春季学期第五周作业

1. 设 $V$ 是域 $F$ 上的线性空间, 设 $f\colon V\times V\to F$ 为双线性函数, 且对任意的 $\alpha\in V$ 都有 $f(\alpha,\alpha)=0$, 求证: $f$ 是斜对称的.

2. 设

$$\begin{aligned} f\colon \mathrm{M}_2(F)\times\mathrm{M}_2(F) &\longrightarrow F\\ (A,B) &\longmapsto \mathrm{tr}(AB). \end{aligned}$$

   (1) 验证 $f$ 是 $\mathrm{M}_2(F)$ 上的对称双线性型;

   (2) 求 $f$ 在基底 $E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}$ 下的矩阵, 并求 $\mathrm{rank}(f)$.

3. 设

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&3&2\\2&2&4\end{pmatrix}\in\mathrm{SM}_3(\mathbb{R}),$$

   利用行列相伴消元把 $A$ 化成对角阵 $B$, 并计算 $P\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得 $B=P^tAP$.

4. 设

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}10&0\\0&10\end{pmatrix}.$$

   求 $P\in\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ 使得

$$P^tAP=B.$$

5. 证明: 秩为 $r$ 的对称矩阵可以表达成 $r$ 个秩等于 1 的对称矩阵之和.