2025年春季学期第四周作业

1. 设 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (1) 计算 $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ 的一组基和 $\mathbb{Q}^3/V$ 的维数.

   (2) 令 $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, 判断 $\boldsymbol{w}$ 是否为 $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ 的线性组合.

2. 设在 $\mathbb{Q}^3$ 中, $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   $\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (1) 求基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的转换矩阵.

   (2) 求 $\boldsymbol{\gamma}$ 分别在这两个基下的坐标.

3. (1) 设 V 是域 $\mathbb{F}$ 上线性空间, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ 是 V 的一组基, $\boldsymbol{w}_i = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)\boldsymbol{x}_i$, $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{F}^n, i = 1, \ldots, k$. 证明: $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ 线性相关.

   (2) 设 $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{w}_3 = 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3$. 求 $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3 \rangle$ 的一组基.

4. 设 $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$, 其中 $\mathbb{F}$ 是域, 证明:

   (1) $\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$.

   (2) $m - \mathrm{rank}(E_m - AB) = n - \mathrm{rank}(E_n - BA)$.

5. 设 $V = \mathbb{R}[x]^{(n)}$. 对 $i = 0, 1, \ldots, n$, 定义:

$$\begin{aligned} \phi_i \colon V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \frac{1}{i!} \frac{d^i f}{dx^i}(0). \end{aligned}$$

   验证 $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$ 是 $1, x, \ldots, x^{n-1}$ 的对偶基.