2025年春季学期第三周作业

1. 将数域 $\mathbb{C}$ 上的无穷数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 全体组成的集合看作 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 W. 定义 W 中任意两个数列的加法 $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$ 及数乘 $\lambda\{a_n\}=\{\lambda a_n\}$, $\lambda\in\mathbb{C}$. 如下集合 V 是否组成 W 的一个子空间? 如果是, 求出它的维数及一组基.

   (1) W 中所有等比数列组成的集合.

   (2) W 中所有等差数列组成的集合.

2. 设 W_1 和 W_2 分别是 $\mathbb{Q}$ 上线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_3-x_4=0 \\ x_2+2x_3+x_4=0 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+2x_4=0 \\ x_2+4x_3+3x_4=0 \end{cases}$$

   的解空间. 求 $W_1\cap W_2$ 的一组基, 并由此分别扩充为 W_1 和 W_2 的一组基.

3. 设 $d\in\mathbb{Z}^+$ 和 $\mathbb{R}[x]^{(d)}=\{f\in\mathbb{R}[x]\mid \deg(f)<d\}$. 定义映射

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{R}[x]^{(d)} &\longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(d)} \\ f &\longmapsto x\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)-f(x). \end{aligned}$$

   证明 ϕ 是线性映射, 并分别求其核空间和像空间的一组基.

4. 设 $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{C}$ 两两不相等, $y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{C}$. 求证: 存在唯一一个次数低于 n 的多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\in\mathbb{C}[x]$ 使得 $f(x_i)=y_i$ 对 $1\leq i\leq n$ 成立. 并简述如何求解 $f(x)$.

5. 设 V 是域 F 上的线性空间.

   (1) 设 V_1,V_2 是 V 的子空间. 证明: $V=V_1\cup V_2$ 蕴含 $V=V_1$ 或 $V=V_2$. (*提示: 参见上学期第十二次作业第 5 题或期末考试 A 卷第 6 题*).

   (2) (选做) 设 F 的特征等于零. 证明: V 不可能是有限个真子空间的并. (*谨此告别无穷维线性空间*).