2025年春季学期第二次作业

1. 设 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. 若 $\alpha = \frac{k}{l} \in \mathbb{Q}$, $\gcd(k,l) = 1$ 为其根, 证明: $k \mid a_0$ 且 $l \mid a_n$.

2. 设 D 是 UFD, $a, b_1, \ldots b_n \in D^*$. 证明: 如果 $\gcd(a, b_i) = 1$, $i = 1 \ldots n$, 则
$$\gcd(a,\, b_1 \cdots b_n) = 1.$$

3. 判断整系数多项式 x^2+4, x^3+4, x^4+4 和 $x^5+12x^3+36x+12$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中是否不可约.

4. 已知 $f(x) = x^p - x - 1$ 在 $\mathbb{Z}_p[x]$ 中不可约, 其中 p 为素数. 证明:
$$f(x) = x^p - x - 1 \quad \text{和} \quad g(x) = x^p + (p-1)x + p - 1$$
在 $\mathbb{Q}[x]$ 上不可约.

   提示*: 利用环同态:*
$$\begin{array}{cccc} \phi_p : & \mathbb{Z}[x] & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p[x] \\ & \sum_i a_i x^i & \mapsto & \sum_i \bar{a}_i x^i. \end{array}$$

5. 设 $f(x)$ 是无穷阶可导的实函数, 其导数记为 f', k 阶导数记为 $f^{(k)}$.
   (a) 设 $f \in \mathbb{R}[x]$. 证明: f, f', f'' 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关当且仅当 $\deg(f) \geq 2$.
   (b) 设 $f(x) = x^2 e^x$. 求最小正整数 n 使得 $f, f', \ldots, f^{(n)}$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性相关.