2025年春季学期第一次作业

1. 在扩展的辗转相除法(Extended Euclidean Algorithm)中, 令 $a, b \in F[x]^*, r_0 := a, r_1 := b$, 执行 $r_{i+2} := \mathrm{rem}(r_i, r_{i+1}, x)$, 其中 $i = 0, 1, \ldots$. 设 k 是最小的正整数使得 $r_{k+1} = 0$, 证明 $\gcd(r_i, r_{i+1}) = \gcd(r_{i+1}, r_{i+2})$, 其中 $i = 0, \ldots, k-1$, 因而 $\gcd(a, b) = r_k$.

2. 设 $a = x^4 - 1$ 和 $b = x^2 + 2x + 1$. 分别在 $\mathbb{Q}[x]$ 和 $\mathbb{Z}_2[x]$ 中求解 $\gcd(a, b)$, $\mathrm{lcm}(a, b)$ 以及多项式 u, v 使得 $ua + vb = \gcd(a, b)$.

3. 设 D 是整环, $a, b, c, d \in D$. 证明 $a \approx b$ 和 $c \approx d$ 蕴含 $ac \approx bd$.

4. 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是 $\mathbb{Q}^3$ 的标准基, 线性映射 $\mathcal{A}\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ 由

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2,\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_3,\ \mathcal{A}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1$$

   确定.

   (a) 求非零多项式 $f \in \mathbb{Q}[t]$ 使得 $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, 其中 $\mathcal{O}$ 代表从 $\mathbb{Q}^3$ 到 $\mathbb{Q}^3$ 的零线性映射.

   (b) 求解 $\dim(\ker(\mathcal{A}^2 + \mathcal{A} + \mathcal{I}))$, 其中 $\mathcal{I}$ 代表从 $\mathbb{Q}^3$ 到 $\mathbb{Q}^3$ 的恒等线性映射.

5. 设 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{x + y\sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. 求 5 在 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ 中的不可约分解.