第十五次作业

1. 设 F 是域, $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $A^2 = E$. 证明:

   (i) 如果 F 的特征不等于 2, 则 $\operatorname{rank}(A-E) + \operatorname{rank}(A+E) \leq n$,

   (ii) 如果 F 的特征等于 2, 则 $\operatorname{rank}(A-E) \leq n/2$.

2. 设域 $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{i} \mid i = 0, 1, 2\}$, $f(x) = x^2 + \bar{2}$, 和

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

   计算 $f(A)$. 确定 $f(A)$ 是否可逆. 当 $f(A)$ 可逆时, 计算 $f(A)^{-1}$. .

3. 多项式 $f(X) = X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 - 3X - 1$, $g(X) = X^2 + X + 1$ 可以看作环 $\mathbb{Q}[X]$ 中的多项式或者环 $\mathbb{Z}_5[X]$ 中的多项式. 用带余除法证明:

   (i) 在第一种情况下 $f(x)$ 不被 $g(x)$ 整除,

   (ii) 而在第二种情况下，$f(x)$ 可以被 $g(x)$ 整除.

4. 设数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} k & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix},$$

   其中 $k, c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, 求 A^{-1}.