# 第十四次作业

1. 设
$$A=\begin{pmatrix}\bar{1} & \bar{2} & \bar{0}\\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2}\\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2}\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_3(\mathbb{Z}_3).$$

   (1) 求线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解空间;

   (2) 求 $A$ 的列空间中所含向量的个数.

2. 设 $\phi:\mathbb{Z}_5^4\to\mathbb{Z}_5^2$ 的由
$$\phi(\mathbf{e}_1)=\boldsymbol{\epsilon}_1+\bar{2}\boldsymbol{\epsilon}_2,\ \phi(\mathbf{e}_2)=-\boldsymbol{\epsilon}_2,\ \phi(\mathbf{e}_3)=\bar{3}\boldsymbol{\epsilon}_1,\ \phi(\mathbf{e}_4)=\bar{3}\boldsymbol{\epsilon}_1+\bar{2}\boldsymbol{\epsilon}_2$$
确定的线性映射, 其中 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{Z}_5^4$ 的标准基, $\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2$ 是 $\mathbb{Z}_5^2$ 的标准基. 计算: (i) $\phi$ 在上述标准基下的矩阵, (ii) $\dim(\mathrm{im}(\phi))$ 和 $\dim(\ker(\phi))$, (iii) $\phi(\mathbf{v})$, 其中 $\mathbf{v}=(\bar{1},-\bar{1},\bar{0},\bar{2})^t$

3. 计算 $11^{1752} \mod 71$ (提示：利用 Fermat 小定理).

4. 设 $f(x)=x^2+2x-3\in\mathbb{Z}[x]$ 分别求

   (a) $f(3)\in\mathbb{Z}$;

   (b) $f(\bar{5})$, 其中 $\bar{5}\in\mathbb{Z}_7$;

   (c) $f(A)$, 其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

5. 设 $\mathbb{F}$ 是域

   (a) 设 $a,b\in\mathbb{F}$ 且 $a\neq 0$. 证明: 映射
$$\begin{aligned}\phi_{a,b}:\mathbb{F}[x]&\to\mathbb{F}[x]\\ p(x)&\mapsto p(ax+b)\end{aligned}$$
   是从 $\mathbb{F}[x]$ 到 $\mathbb{F}[x]$ 的环同构.

   (b) 设 $\sigma:\mathbb{F}[x]\to\mathbb{F}[x]$ 是环同构且 $\sigma|_{\mathbb{F}}=id_{\mathbb{F}}$. 证明: 存在 $a,b\in\mathbb{F}$ 且 $a\neq 0$ 使得 $\sigma=\phi_{a,b}$.