

第十三次作业

1. 列出群 $(\mathbb{Z}_{12}, +, \bar{0})$ 的所有子群 (要求不重不漏)
2. 设 G 为循环群且 $\text{card}(G) = +\infty$, 证明 G 只有两个生成元;
3. 证明 \mathbb{Z}_{13} 中的乘法可逆元关于乘法构成循环群 (提示: 计算 $\bar{2}$ 的阶).
4. 设 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. 验证 $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, 0, \cdot, 1)$ 是 $(\mathbb{R}, +, 0, \cdot, 1)$ 的子环. 确定该子环中所有可逆元.
5. 设 x 是环 R (有单位元) 的一个非零元素, 则称 x 为幂零的若存在 $n \in \mathbb{Z}^+$, 使得 $x^n = 0$. 证明:
 - (1) 如果 x 是幂零元, 则有 $1 - x$ 是可逆元;
 - (2) 环 \mathbb{Z}_m 包含幂零元当且仅当 m 可以被一个大于 1 的整数的平方整除.
6. 设 $(R, +, 0, \cdot, 1)$ 是一个环, $u \in R$. 若存在 $v \in R$ 使得 $uv = 1$, 我们称 u 有右逆. 现设 u 有右逆, 证明以下命题等价:
 - (1) u 不是 R 中的可逆元;
 - (2) u 为左零因子;
 - (3) u 有多于一个右逆.