第十二次作业

1. 确定 $\mathbb{Z}_{14}$ 中关于乘法的所有可逆元并求它们的逆.

2. 设 G 是实数对 $(a,b), a \neq 0$ 的集合, 在 G上定义乘法 $\circ$

$$(a,b) \circ (c,d) = (ac, ad+b).$$

   证明 $(G, \circ)$ 是群.

3. 设 G, H 为两个群,单位元分别为 e_G, e_H, 设 $\phi : G \to H$ 为群同态, 记

$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = e_H\}.$$

   证明:

   (1) $\ker(\phi)$ 为 G 的一个子群;

   (2) $g\ker(\phi) = \ker(\phi)g$ 对任意 $g \in G$ 成立, 其中

$$g\ker(\phi) = \{gg' \mid g' \in \ker(\phi)\},\ \ker(\phi)g = \{g'g \mid g' \in \ker(\phi)\};$$

   (3) ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi) = \{e_G\}$.

4. 设 G 是一个有限（乘法）群，H 是 G 的一个非空子集，如果 H 关于 G 的乘法封闭，证明 H 是一个子群.

5. 设 A, B 分别是群 G 的两个子群, 证明:

   (1) $A \cup B$ 是 G 的子群当且仅当 A 是 B 的子群或者 B 是 A 的子群;

   (2) 群 G 不能表示成两个真子群的并.

6. 设 $(G, \cdot, e)$ 是有限群. 证明: $\mathrm{card}(G)$ 为偶数当且仅当 G 中包含有元素 g 满足 $g \neq e$ 和 $g^2 = e$.