

第十次作业

1. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. 计算行列式

$$(1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \end{vmatrix}, \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 & 5 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & -7 \\ 8 & -2 & 3 & -5 \end{vmatrix}.$$

3. 分别求出在行列式

$$\begin{vmatrix} 5x & x & 1 & x \\ 1 & x & 1 & -x \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

的展开式中含 x^4 和 x^3 的项的系数.

4. 计算下列 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 - a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 - a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 - a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 - a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 - a_n \end{vmatrix}$$

5. (选做-与行列式无关) 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 证明: 存在 $C \in M_n(\mathbb{R})$ 使得

$$A = ABC$$

当且仅当 $\text{rank}(A) = \text{rank}(AB)$.