第九次作业

1. 求以下矩阵的逆

$$(1)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\quad(2)\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

2. 证明: 任意一个 n 阶方阵都可以写成一个 n 阶对称矩阵和一个 n 阶斜对称矩阵的和.

3. 若 $A=A^t$, $B=B^t$, 证明：

$$\operatorname{tr}\left((AB)^2\right)\le\operatorname{tr}\left(A^2B^2\right).$$

4. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(A)=r$. 证明：A 可以写成 r 个秩为1的矩阵的和，且不能写成 $r-1$ 个秩为1的矩阵的和. （提示：利用打洞引理和秩不等式）

5. 设 $A\in\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$ 可逆，$D\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆，证明： $X=\begin{pmatrix}A&B\\O&D\end{pmatrix}$ 可逆，并求 X^{-1}.

6. 设 $A\in\mathrm{M}_m(\mathbb{R})$, $B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $C\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $X=\begin{pmatrix}A&C\\O_{n\times m}&B\end{pmatrix}$, 满足 $XX^t=X^tX$. 证明：

   (1) 证明：$\operatorname{tr}(C^tC)=0$;

   (2) (选作) 证明：$C=O_{m\times n}$.