第八次作业

1. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   计算：A^2, A^3, 并求对任意$k \in \mathbb{Z}^+$, A^k 的表达式.

2. 设 $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 证明：

$$\operatorname{rank}(A+B+C) \leq \operatorname{rank}(A+B)+\operatorname{rank}(B+C)+\operatorname{rank}(C+A).$$

3. 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是对称矩阵, $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是斜对称矩阵, 证明以下结论:

   (1) AB 是对称矩阵当且仅当 $AB = BA$,

   (2) 如果 A 是可逆矩阵, 则 A^{-1} 也是对称矩阵,

   (3) 如果 C 是可逆矩阵, 则 C^{-1} 也是斜对称矩阵.

4. 设 A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 证明：$\operatorname{tr}(AA^t) \geq 0$, 且 $\operatorname{tr}(AA^t) = 0$ 当且仅当 $A = 0$.

5. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}$, $B \in \mathbb{R}^{s\times n}$. 证明：如果 $AB = O_{m\times n}$, 则 $\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B) \leq s$.