第七次作业

1. 设 $\mathbb{R}^4$ 中标准基为 $\mathbf{e}_i$, $i=1,2,3,4$. 线性映射 $\phi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 由如下关系给出：

$$\phi(\mathbf{e}_1)=3\mathbf{e}_1-5\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\qquad \phi(\mathbf{e}_2)=-2\mathbf{e}_1+7\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_4,$$
$$\phi(\mathbf{e}_3)=-\mathbf{e}_1-6\mathbf{e}_3+4\mathbf{e}_4,\qquad \phi(\mathbf{e}_4)=2\mathbf{e}_2+3\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4.$$

   (1) 求 ϕ 在标准基下的矩阵，并分别求 $\ker(\phi)$, $\mathrm{im}(\phi)$ 的维数和一组基;

   (2) 求 $\phi\circ\phi$ 在 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4$ 下的矩阵.

2. 设 $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 由 $\phi(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. 给出. 计算 ϕ 在标准基下的矩阵和 $\ker(\phi)$ 的一组基.

3. 计算下述情况时的 AB, BA 以及 $\mathrm{rank}(AB)$ 和 $\mathrm{rank}(BA)$:

   (1) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\alpha\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$, 其中 α, $\beta\in\mathbb{R}$.

   (2) $A=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

4. 设整数 $m\geq 1$. 证明:

$$\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^m=\begin{pmatrix}1 & ma & \frac{m(m-1)}{2}ab+mc\\ 0 & 1 & mb\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5. 设 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性映射，并且满足对任意的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\phi(\mathbf{x})\in\langle\mathbf{x}\rangle$. 证明：存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得对任意的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\phi(\mathbf{x})=\lambda\mathbf{x}$.

6. 设 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性映射，证明：

   (1) $\ker(\phi)\subseteq\ker(\phi^2)\subseteq\cdots\subseteq\ker(\phi^m)\subseteq\cdots$; 和
   $\mathrm{im}(\phi)\supseteq\mathrm{im}(\phi^2)\supseteq\cdots\supseteq\mathrm{im}(\phi^m)\supseteq\cdots$;

   (2) 存在正整数 k 使得这两个子空间序列同时稳定，即
   $\ker(\phi^k)=\ker(\phi^{k+1})=\ker(\phi^{k+2})=\cdots$; 和
   $\mathrm{im}(\phi^k)=\mathrm{im}(\phi^{k+1})=\mathrm{im}(\phi^{k+2})=\cdots$.