第六次作业

1. 设 A 和 B 是实数域上的有相同行数的矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

2. 证明：

   (1) 矩阵加一行，则秩不变或增加 1；

   (2) 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\operatorname{rank}(A) = r$, 则 A 的任意 s 行组成一个秩不小于 $r+s-m$ 的矩阵.

3. 计算齐次线性方程组 H: $\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 - \ \ 2x_3 + \ \ 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + \ \ 6x_3 - \ \ 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - \ \ 2x_3 + \ \ 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$ 解空间的一组基.

4. 求出下列线性方程组 L: $\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + 3x_3 + \ \ 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + \ \ 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + \ \ 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$ 与参数 λ 的值对应的解流形.

5. 在下述映射中，哪些是线性映射:

   (1) $[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mapsto [x_n, x_2, \cdots, x_1]$;

   (2) $[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mapsto [x_1, x_2^2, \cdots, x_n^n]$;

   (3) $[x_1, x_2, \cdots, x_n] \mapsto [x_1, x_1 + x_2, \cdots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n]$.

6. 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是线性映射且满足: 对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} - \phi(\mathbf{x}) \in U.$$

   (i) 证明: $\ker(\phi) \subset U$

   (ii) 再设 $\ker(\phi) = U$. 证明: $\mathbb{R}^n = \ker(\phi) \oplus \operatorname{im}(\phi)$