第五次作业

1. 设 V, V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 举例说明

    (1) $V \cap (V_1 + V_2) = V \cap V_1 + V \cap V_2$ 一般不成立.

    (2) $V + V_1$ 是直和, $V + V_2$ 也是直和, 但 $V_1 \neq V_2$.

2. 设向量 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V = \{\lambda \mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, 且 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$, 则 V, W 都是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

    (1) 求 W 的维数与一组基;

    (2) 证明 $V \oplus W = \mathbb{R}^3$;

    (3) 将（1）中所得的 W 的基记为 $\{\mathbf{w_1}, \mathbf{w_2}\}$, 证明：$\{\mathbf{v},\ \mathbf{w_1},\ \mathbf{w_2}\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基;

    (4) 设 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, 则存在唯一实数 x, y, z, 使得 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x\mathbf{v} + y\mathbf{w_1} + z\mathbf{w_2}$. 求 x.

3. 设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$\dim(V) = d$, 且 V 中有 t 个向量 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_t}$ 使得 $V = \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_t} \rangle$.

    证明：$t \geq d$, 且 $t = d$ 当且仅当 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_t}$ 线性无关.

4. (1) 求 $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩.

    (2) 设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. 求 $\begin{pmatrix} 1 & e & e \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ 的秩

5. 设 V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间，证明：$V_1 + V_2$ 是直和当且仅当

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2).$$