第四次作业

（共两页，10月9日交）

1. 判断以下置换的奇偶性：

   (1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

   (2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 设 $\sigma \in S_n$ 为置换.

   (1) 若 $\mathrm{ord}(\sigma)$ 为奇数，证明 σ 为偶置换；

   (2) 当 $\mathrm{ord}(\sigma)$ 为偶数时， σ 是否一定为奇置换？给出证明或举出反例.

3. (1) 求 $\gcd(35, 60)$, $\mathrm{lcm}(35, 60)$;

   (2) 计算整数 u, v 使得 $60u + 35v = \gcd(35, 60)$ 成立 (写过程).

4. 设 $n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 3$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}^+$. 证明:

   (1) $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \gcd\left(\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n\right)$;

   (2) 存在整数 $u_1, u_2, \ldots, u_n$，使得 $u_1a_1+u_2a_2+\cdots+u_na_n = \gcd(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

5. 计算线性组合 $3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - 5\mathbf{v}_3$, 其中
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

6. 判断下述向量组是否线性无关

   (1)
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

7. 给定一个线性无关的向量组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$. 判断向量组

   $b_1 = 3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4,\ b_2 = 2\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4,\ b_3 = 3\alpha_1+4\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4.$

   是否线性相关.

8. 设 $\beta,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_k \in \mathbb{R}^n$ 且 $\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_k$ 线性无关. 再设

   $$\beta = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_k\alpha_k,$$

   其中 $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ 且 $a_1 \neq 0$. 证明: $\beta,\ \alpha_2,\dots,\alpha_k$ 线性无关.