第二次作业

1. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 考虑线性方程组

$$\begin{cases} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y = a \\ \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y = b \end{cases}$$

   (a) 证明该方程组是确定的；

   (b) 设

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

   如果α和β不全为零，则记$\ell(\alpha, \beta)$ 是点 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 与原点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的连线，计算$\ell(u, v)$ 和 $\ell(a, b)$ 的夹角，其中 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 是上述方程组的解且 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. 设 $f : A \to B$, $g : B \to C$ 是两个映射. 证明：

   (a) 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射；

   (b) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射.

3. 设 A, B 是集合 X 的两个子集合，$f : X \to Y$ 是一个映射，证明：

   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

   (b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$，并举例说明存在真包含的情况.

4. 用 $S\Delta T$ 表示两个集合 S 与 T 的对称差：$S\Delta T = (S \setminus T) \cup (T \setminus S)$. 证明：

$$S\Delta T = (S \cup T) \setminus (S \cap T).$$

5. 设 $S = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. 如果二维向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ 在以原点为圆心的某个圆上，则称 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 有关系 R，记为 $\mathbf{u}R\mathbf{v}$.

   (a) 验证 R 是等价关系；

   (b) 设 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 由习题 1 给出. 说明 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 是否成立.