

# 第一次作业

1. 设  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, 4$ . 写出满足条件:

$$p(\alpha_i) = \beta_i, i = 1, 2, 3, 4$$

的三次实多项式  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  关于变量  $a, b, c, d$  的系数矩阵及增广矩阵.

2. 设  $a \in \mathbb{R}$ . 判断下面的方程组解的相容性和确定性的情况.

$$(1) \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}, (2) \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \end{cases}, (3) \begin{cases} ax_1 + (1-a)x_3 = -1 \\ x_1 - ax_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

3. 设  $3 \times 4$  阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 6 & 3 & b \\ 3 & -2 & 1 & c \end{pmatrix},$$

其中  $a, b, c$  是实数, 设  $L$  是以  $A$  为增广矩阵的线性方程组, 问:

- (a)  $a, b, c$  满足什么条件时才能使  $L$  相容;  
(b) 是否存在  $a, b, c$  使得  $L$  确定.

4. 设线性方程组  $H$  有两组解  $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$  和  $x_1 = \beta_1, \dots, x_n = \beta_n$ .

- (a) 若  $H$  是齐次的, 证明: 对任意实数  $u, v$ ,

$$x_1 = u\alpha_1 + v\beta_1, \dots, x_n = u\alpha_n + v\beta_n$$

也是  $H$  的解;

- (b) 若  $H$  是非齐次的, 证明: 对任意实数  $k$ ,

$$x_1 = \alpha_1 + k(\alpha_1 - \beta_1), \dots, x_n = \alpha_n + k(\alpha_n - \beta_n)$$

也是  $H$  的解.

5. 用数学归纳法证明:

- (a)  $(1+h)^n \geq 1+nh$ , 其中  $n \in \mathbb{N}, h > -1$ ;  
(b)  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$  其中  $n \in \mathbb{N}^*$