1. 验证实矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的所有顺序主子式都非负. 问该矩阵是否半正定?

解: $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ 此矩阵对应二次型的签名为 $(0,1)$. 该矩阵不是半正定的,是半负定的.

另: $\forall \vec{x} = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$ $q(\vec{x}) = \vec{x}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} = -x_2^2 \leq 0$ $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$, $q(\vec{x}) < 0$.

注: A 的所有顺序主子式 $\Delta_i \geq 0$ $i = 1, \cdots, n$ $\not\Rightarrow$ A 半正定
$\Leftarrow$

"$\Leftarrow$": 见第3题: 半正定矩阵的行列式非负.

参考 定理9.20 (i) $\Rightarrow$ (ii)

2. 设实二次型为 $q(x,y,z)=\lambda(x^2+y^2+z^2)+3y^2-4xy-2xz+4yz$, 问:

(1) λ 取什么值时二次型矩阵 q 为正定矩阵.

(2) λ 取什么值时二次型矩阵 q 为半负定矩阵.

(3) λ 取什么值时二次型矩阵 q 为实一次多项式的完全平方.

实际上我们想要充分必要条件. 先找必要条件. 再验证充分性.

解: 二次型 $q(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的标准基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & -2 & -1\\ -2 & \lambda+3 & 2\\ -1 & 2 & \lambda\end{pmatrix}$$

计算A的顺序主子式得:

$\Delta_1=\lambda$, $\Delta_2=\lambda^2+3\lambda-4=(\lambda+4)(\lambda-1)$, $\Delta_3=\lambda^3+3\lambda^2-9\lambda+5=(\lambda+5)(\lambda-1)^2$

(1) A 是正定矩阵 $\Leftrightarrow$ $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$.

$$\begin{cases}\lambda>0\\ (\lambda+4)(\lambda-1)>0\\ (\lambda+5)(\lambda-1)^2>0\end{cases}\Leftrightarrow \lambda>1$$

当 $\lambda>1$ 时, q 是正定的.

(2) A是半负定矩阵.

① $|A|\neq 0$ A是负定矩阵 $\Leftrightarrow$ $-A$是正定矩阵. $\Leftrightarrow$

$$(-1)^n \Delta_n > 0 \quad \forall n=1,2,3. \quad \begin{cases} -\lambda > 0. \\ (\lambda+4)(\lambda-1) > 0 \\ (\lambda+5)(\lambda-1)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda < -5$$

② $|A| = 0 \Rightarrow \lambda = -5$ 或 1.

若 $\lambda=-5$. 则

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{2}{5}(1)+(2)} \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{12}{5} \\ -1 & \frac{12}{5} & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}(1)+(3)} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{12}{5} & -\frac{24}{5} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2(2)+(3)} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即 $A \simeq_c \operatorname{diag}(-5, -\frac{6}{5}, 0)$

此时A是半负定矩阵.

若 $\lambda=1$. 则

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2(1)+(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)+(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \simeq_c \mathrm{diag}(1,0,0)$

故当 $\lambda \le -5$ 时. q 是半负定的.

不建议直接带参数用行列相伴消元解此类题. 涉及复杂的分类讨论.

(3) $|A| = 0$. 由(2)中推导可知当 $\lambda = 1$ 时, q 为实一次多项式的完全平方.

另: $q(x,y,z) = (ax+by+cz)^2$ $\begin{cases} a^2 = \lambda^2 \\ b^2 = \lambda+3 \\ c^2 = \lambda \\ a\cdot b = -2 \\ a\cdot c = -1 \\ b\cdot c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda^2(\lambda+3) = 4 \\ \lambda^3 = 1 \\ \lambda(\lambda+3) = 4 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1.$

当 $\lambda = 1$ 时, $a = -1$ $b = 2$ $c = 1$ $q(x,y,z) = (-x+2y+z)^2$

3. (i) 证明: 半正定矩阵的行列式非负.

(ii) 设 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, 证明

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{pmatrix}$$

半正定, 并以此证明 Cauchy 不等式.

证明: (i) 设A是半正定矩阵,则存在 $P \in GL_n(\mathbb{R})$ 使得: $P^t A P = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

其中 $r = \operatorname{rank}(A)$ 那么 $|P^t| \cdot |A| \cdot |P| = |P|^2 \cdot |A| \geqslant 0$.

又 $|P| \neq 0$. 故 $|A| \geqslant 0$.

另: A 半正定 $\Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{R})$ s.t. $A = B^t \cdot B$, $|A| = |B^t| \cdot |B| = |B|^2 \geqslant 0$.

(ii) $$A = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_1 & b_n \end{pmatrix}$$

$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{x}^t \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{x}^t \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_1 & b_n \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{y}^t \cdot \vec{y} \geqslant 0$

其中 $\vec{y} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \vec{x}$ 故矩阵 A 是半正定的.

$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2. \quad (x_1, \ x_2) \ A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (a_i x_1 + b_i x_2)^2 \geqslant 0.$

$\Rightarrow |A| = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \geqslant 0 \iff \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$

— Cauchy 不等式.

A 半正定. $\quad A = P^t \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot P = P^t \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{(E_r \ \ 0) \cdot P}_{B_{r \times n}}$

$= B^t \cdot B \qquad r = \operatorname{rank}(A).$

4. 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 如果 A 正定, ϵ 是充分小的实数. 证明: 方阵 $A + \epsilon B$ 是正定的.

绝对值.

证明：由 A 正定，存在 $P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $A=P^t\cdot P$. A 正定 $\Leftrightarrow$ $\Delta_i(A)>0$ $i=1,\dots,n$

$$A+\varepsilon B=P^t(I+\varepsilon(P^t)^{-1}\cdot B\cdot P^{-1})\cdot P.$$

$$A+\varepsilon B=\begin{pmatrix} a_{11}+\varepsilon b_{11} & \cdots & a_{1n}+\varepsilon b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+\varepsilon b_{n1} & \cdots & a_{nn}+\varepsilon b_{nn}\end{pmatrix}$$

令 $C=\varepsilon(P^t)^{-1}\cdot B\cdot P^{-1}=\varepsilon(P^{-1})^t\cdot B\cdot P^{-1}$

$\because B\in SM_n(\mathbb{R})$ $\therefore C\in SM_n(\mathbb{R})$. $\Delta_i(A+\varepsilon B)$ 是关于 ε 的多项式.

考虑实对称矩阵：$I+\varepsilon C$. 当 $\varepsilon=0$ 时其为正定矩阵. $\Delta_i(A+\varepsilon B)\big|_{\varepsilon=0}=\Delta_i(A)>0$.

$$I+\varepsilon\cdot C=\begin{pmatrix} 1+\varepsilon C_{11} & \cdots & \varepsilon C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon C_{n1} & \cdots & 1+\varepsilon C_{nn}\end{pmatrix}$$

设它的顺序主子式为 $\Delta_i(I+\varepsilon C)$, $i=1,\dots,n$. 其为关于 ε 的多项式（连续函数）.

由 $\Delta_i(I)>0$ $\forall i=1,\dots,n$. $\exists\,\delta_i>0$. $\forall\varepsilon\in(-\delta_i,\delta_i)$ 都有 $\Delta_i(\varepsilon)>0$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}$ $\forall\varepsilon\in(-\delta,\delta)$. 有 $\Delta_i(\varepsilon)>0$ $\forall i=1,\dots,n$

注：(1) 如果按照定义. $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ $\vec{x}^t(A+\varepsilon B)\vec{x}=\overbrace{\vec{x}^tA\vec{x}}^{>0}+\varepsilon\vec{x}^tB\vec{x}$

要找到统一的 ε 足够小 使得 $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ 上式均 >0. 首先不妨设 $A=I$.

$\vec{x}^t(I+\varepsilon\cdot B)\cdot\vec{x}=\vec{x}^tI\cdot\vec{x}+\varepsilon\vec{x}^t\cdot B\cdot\vec{x}$

取 A 的规范型：

$$=x_1^2+\cdots+x_n^2+\varepsilon\sum_i\sum_j b_{ij}x_ix_j$$

$$|x_ix_j|\leq\frac{x_i^2+x_j^2}{2}$$

$$\varepsilon\cdot b_{ij}x_ix_j\geqslant-|\varepsilon|\cdot|b_{ij}|\cdot\frac{x_i^2+x_j^2}{2}$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i \sum_j |\varepsilon|\cdot|b_{ij}|\,(x_i^2+x_j^2)$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - |\varepsilon|\cdot \max|b_{ij}|\cdot n\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

取 $|\varepsilon| < \frac{1}{n\cdot \max|b_{ij}|}$ 上式 >0.

Lemma (对角占优) $A\in(a_{ij})_{n\times n}\in M_n(\mathbb{R})$. 若 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 则 $\det(A)\neq 0$. 特别地, 若 $a_{ii} > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ $\forall i=1,\cdots,n$ 则 $\det(A)>0$. 严格对角占优. e.g. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

$|\varepsilon| < \frac{1}{n\cdot \max|b_{ij}|}$. $|\varepsilon|(n-1)\cdot\max|b_{ij}| < 1-|\varepsilon|\cdot\max|b_{ij}| \Rightarrow \sum_{j\neq i}\varepsilon b_{ij} < 1+\varepsilon b_{ii}$ $\forall i$

$I+\varepsilon B$ 对角占优. $|I+\varepsilon B|>0$. $I+\varepsilon B$ 的各阶顺序主子式均大于 0.

Proof. 若 $\det(A)=0$ 则 $\exists X\neq\vec{0}$ s.t. $AX=0$. $a_{i1}x_1+\cdots+a_{ii}x_i+\cdots+a_{in}x_n=0$. $|x_i|=\max_j|x_j|$.

$$a_{ii}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{ij}x_j \Rightarrow |a_{ii}|\,|x_i| \leq \sum_{j\neq i}|a_{ij}|\,|x_j| < |a_{ii}|\cdot|x_i|. \rightarrow\leftarrow$$

若 $a_{ii} > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ 则 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ $\det(A)\neq 0$.

$t+a_{ii} > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ $\forall t>0$. $\Rightarrow \det(tE+A)\neq 0$.

又 $\lim_{t\to\infty}|tE+A| = +\infty$. $\Rightarrow$ 当 $t=0$ 时 $|A|>0$.

(2) 如果考虑规范型. A 和 B 的规范基有可能不同, 不能把规范型直接相加.

5. 设 q 是 V 上的二次型, $U \subset V$ 是非零子空间,

$$\begin{array}{rccc} q_U: & U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{u} & \mapsto & q(\mathbf{u}) \end{array}.$$

(i) 验证: q_U 是 U 上的二次型

(ii) 设 q 的签名是 (k,l), q_U 的签名是 (s,t). 证明: $k \geq s$ 且 $l \geq t$.

(i) 由 q 是 V 上的二次型, $\forall \vec{u} \in U \subset V$. $q_U(-\vec{u}) = q_U(\vec{u})$.

设 $\vec{x}, \vec{y} \in U$ 令

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}(q_U(\vec{x}+\vec{y}) - q_U(\vec{x}) - q_U(\vec{y}))$$
$$= \frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y}))$$

$f(\vec{x},\vec{y})$ 是 U 上的对称双线性型. 故 q_U 是 U 上的二次型.

(ii) $\vec{x} \in V$. $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. $q(\vec{x})$ 在规范基 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 下的规范型为

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2$$

$\vec{x} \in U$ $\dim_{\mathbb{R}} U = r \leq n$. $q_U(\vec{x})$ 在规范基 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_r$ 下的规范型为

$$q_U(\vec{x}) = y_1^2 + \cdots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \cdots - y_{s+t}^2$$

由 $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_r\}$ 可扩充为 V 的一组基 $\{\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n\}$.

反证法：若 $k<s$. 则设 $V_1=\langle \vec{e}_{k+1},\cdots,\vec{e}_n\rangle\subseteq V$ 则 $\dim_{\mathbb{R}}V_1=n-k$.

设 $V_2=\langle \vec{\varepsilon}_1,\cdots,\vec{\varepsilon}_s\rangle\subseteq U$ 则 $\dim_{\mathbb{R}}V_2=s$.

$\because V_1+V_2\subseteq V$ $\therefore \dim(V_1+V_2)\leq n$.

$\dim(V_1\cap V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1+V_2)\geqslant n-k+s-n=s-k>0$.

存在非零列向量 $\vec{x}\in V_1\cap V_2\subset U$.

$\vec{x}=x_{k+1}\vec{e}_{k+1}+\cdots+x_n\vec{e}_n=y_1\vec{\varepsilon}_1+\cdots+y_s\vec{\varepsilon}_s$

其中 $x_{k+1},\cdots,x_n\in\mathbb{R}$ 不全为零. $y_1,\cdots,y_s\in\mathbb{R}$ 不全为零.

$q(\vec{x})=-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+l}^2\leq 0$ 但 $q_U(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_s^2>0$. $\rightarrow\leftarrow$.

同理 当 $l<t$ 时 也存在矛盾. 故 $k\geqslant s$ 且 $l\geqslant t$.

事实上, $-q$ 的签名为 (l,k), $-q_U$ 的签名为 (t,s).

注：参考 Sylvester 惯性定理的证明.

(1) q 在规范基 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ 下的规范型为 $q(\vec{x})=x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+l}^2$

$V=\langle\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\rangle$. $q_U(\vec{x})$ 的规范基不一定是 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ 的子集.

(2) $\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n \mid q(\vec{x})>0\}$ 不构成 V 的子空间.

Hadamard Product: (Children Product).

$A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ $B=(b_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ 定义: $A\odot B=(a_{ij}b_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$

性质: (i) $A\odot(B+C)=A\odot B+A\odot C$.

(ii) $A\odot B=B\odot A$

(iii) $\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&&\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix}\odot A=A\odot\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix}=A$

则 $(M_n(\mathbb{R}), O_{n\times n}, \odot, \begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots&&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix})$ 为交换环.

(iv) A 关于 $\odot$ 可逆 $\Leftrightarrow$ $\forall 1\le i,j\le n$ $a_{ij}\in\mathbb{R}$ 可逆 即 $a_{ij}\neq 0$.

e.g. $\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix}$

定理（Schur乘积定理）.

设 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 是(半)正定矩阵，则 $A\odot B$ 也是(半)正定矩阵.

证明：$\because$ B半正定 $\therefore \exists T=(t_{ij})_{n\times n}$ s.t. $B=T^tT$. 即 $b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} t_{ki}t_{kj}$.

对 $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$，有 $\vec{x}^t(A\odot B)\vec{x}=\sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}\,x_ix_j=\sum_{i,j} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} t_{ki}t_{kj}\right)x_ix_j$.

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j} a_{ij}(t_{ki}t_{kj})(x_ix_j)=\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i,j} a_{ij}(t_{ki}x_i)(t_{kj}x_j)\right]=\sum_{k=1}^{n}\vec{y}_k^{\,t}A\vec{y}_k$$

其中 $\vec{y}_k=\begin{pmatrix} t_{k1}x_1\\ \vdots \\ t_{kn}x_n\end{pmatrix}$ 由于A半正定，有 $\vec{y}_k^{\,t}A\vec{y}_k\geqslant 0$.

故 $A\odot B$半正定.

正定情形时，$\forall \vec{x}\neq\vec{0}$，$\exists x_i\neq 0$，$\exists k$ s.t. $t_{ki}\neq 0$. $t_{ki}x_i\neq 0$. $\vec{y}_k^{\,t}A\vec{y}_k>0$，$A\odot B$ 是正定的.

应用：机器学习（核方法）.