1. 设 V 是域 F 上的线性空间, 设 $f: V\times V\to F$ 为双线性函数, 且对任意的 $\alpha\in V$ 都有 $f(\alpha,\alpha)=0$, 求证: f 是斜对称的.

证明: $\forall\alpha,\beta\in V$. 有 $\alpha-\beta\in V$. 且 $f(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=0$.

又 $f(\alpha-\beta,\alpha-\beta)=f(\alpha-\beta,\alpha)-f(\alpha-\beta,\beta)$

$=f(\alpha,\alpha)-f(\beta,\alpha)-f(\alpha,\beta)+f(\beta,\beta)$.

$\because f(\alpha,\alpha)=f(\beta,\beta)=0$

$\therefore f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$

由 α,β 的任意性知 f 是斜对称的.

错误: (1) $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 V 的一组基. $\forall\alpha\in V$.

$\alpha=a_1v_1+\cdots+a_nv_n$ $\quad f(\alpha,\alpha)=(a_1\cdots a_n)A\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=0$. $\quad A^T=-A$.

"不严谨"

题目中并没有指明 V 是有限维线性空间.

(2). 直接写 $\because f$ 是双线性映射.

$\therefore f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)$.

2. 设 结合下周第4题.

$$f\colon \mathrm{M}_2(F)\times \mathrm{M}_2(F)\longrightarrow F$$
$$(A,B)\longmapsto \mathrm{tr}(AB).$$

(1) 验证 f 是 $\mathrm{M}_2(F)$ 上的对称双线性型;

(2) 求 f 在基底 $E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}$ 下的矩阵, 并求 $\mathrm{rank}(f)$.

(1) 证明: $\forall \alpha,\beta\in F.\ A,B,C\in M_2(F)$.

$$\begin{aligned} f(\alpha A+\beta B, C) &= tr((\alpha A+\beta B)\cdot C) \\ &= tr(\alpha A\cdot C)+tr(\beta\cdot B\cdot C) \\ &= \alpha\cdot tr(A\cdot C)+\beta\, tr(B\cdot C) \\ &= \alpha f(A,C)+\beta f(B,C). \end{aligned}$$

同理: $f(A,\alpha B+\beta C)=\alpha f(A,B)+\beta f(A,C)$

故 f 是 $M_2(F)$上的双线性型.

$f(A,B)=tr(AB)=tr(BA)=f(B,A)$

因而 f 是 $M_2(F)$上的对称双线性型.

(2). 设 $\vec{e_1}=E_{1,1}$, $\vec{e_2}=E_{1,2}$, $\vec{e_3}=E_{2,1}$, $\vec{e_4}=E_{2,2}$.

$f(\vec{e_1},\vec{e_1})=1$, $f(\vec{e_1},\vec{e_2})=0$, $f(\vec{e_1},\vec{e_3})=0$, $f(\vec{e_1},\vec{e_4})=0$.

$f(\vec{e_2},\vec{e_1})=0$, $f(\vec{e_2},\vec{e_1})=0$, $f(\vec{e_2},\vec{e_3})=1$. $f(\vec{e_2},\vec{e_4})=0$.

$f(\vec{e_3},\vec{e_1})=0$, $f(\vec{e_3},\vec{e_2})=1$. $f(\vec{e_3},\vec{e_3})=0$, $f(\vec{e_3},\vec{e_4})=0$.

$f(\vec{e_4},\vec{e_1})=0$, $f(\vec{e_4},\vec{e_2})=0$, $f(\vec{e_4},\vec{e_3})=0$, $f(\vec{e_4},\vec{e_4})=1$.

因此 f 在 $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3},\vec{e_4}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rank}(f)=4$.

错误: $A=\begin{pmatrix} f(E_{1,1}\ E_{1,1}) & f(E_{1,2},E_{1,2}) \\ f(E_{2,1}\ E_{2,1}). & f(E_{2,2},E_{2,2}) \end{pmatrix}$

3. 设

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&3&2\\2&2&4\end{pmatrix}\in \mathrm{SM}_3(\mathbb{R}),$$

利用行列相伴消元把 A 化成对角阵 B, 并计算 $P\in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得 $B=P^tAP$.

解:

$$(A|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&3&2&0&1&0\\2&2&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{第1行与第2行互换}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&2&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\2&2&4&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{对称操作}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&1&2&0&1&0\\1&0&2&1&0&0\\2&2&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{第1行通乘}-\frac{1}{3}\text{加到第2行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&1&2&0&1&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&1&-\frac{1}{3}&0\\2&2&4&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{对称操作}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&2&0&1&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&1&-\frac{1}{3}&0\\2&\frac{4}{3}&4&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{第1行通乘}-\frac{2}{3}\text{加到第3行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&2&0&1&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&1&-\frac{1}{3}&0\\0&\frac{4}{3}&\frac{8}{3}&0&-\frac{2}{3}&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{对称操作}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&0&1&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&1&-\frac{1}{3}&0\\0&\frac{4}{3}&\frac{8}{3}&0&-\frac{2}{3}&1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{第2行通乘4加到第3行}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&0&0&0&1&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&1&-\frac{1}{3}&0\\0&0&8&4&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{对称操作}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$:= P^t$

设 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P^t A P = \mathrm{diag}(3, -\frac{1}{3}, 8)$

错误：对称操作时改变了记录矩阵.

注：此题中对角矩阵不唯一，可能有不同的P对应到相同的对角矩阵.

4. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

求 $P \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ 使得

$$P^t AP = B.$$

解: 设 $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$

由 $P^tAP=B$ 得: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & 2c \\ 2b & 2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a^2+2c^2 & 2ab+2cd \\ 2ab+2cd & 2b^2+2d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \begin{cases} a^2+c^2=5 \\ ab+cd=0 \\ b^2+d^2=5 \end{cases}$ 其中一组解为 $\begin{cases} a=2 \\ c=1 \\ b=1 \\ d=-2 \end{cases}$ 即 $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

共有 $4\times2\times2=16$ 个解.

另：(技巧性强，操作并不能系统化).

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)+(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{对称操作}} \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{(2)+(1)} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{对称操作}} \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{2}{5}(1)+(2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{对称操作}} \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{5(2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{对称操作}} \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 10 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

5. 证明: 秩为 r 的对称矩阵可以表达成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

证明: 设 $A \in SM_n(F)$, $\mathrm{rank}(A)=r$. 则存在 $P \in GL_n(F)$ s.t.

$P^T A P = B = \mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$. 其中 $\lambda_i \neq 0$ $\forall i=1,\cdots,r$. $\longrightarrow$ 推论7.17

令 $B_i = \mathrm{diag}(0,\cdots,\underset{\uparrow \text{第}i\text{个位置}}{\lambda_i},\cdots,0)$ $i=1,\cdots,r$. 则 $B=B_1+\cdots+B_r$.

$$A=(P^T)^{-1} B\cdot P^{-1}=(P^{-1})^T\cdot B\cdot P^{-1}=(P^{-1})^T\cdot B_1 P^{-1}+\cdots+(P^{-1})^T B_r\cdot P^{-1}.$$

令 $A_i=(P^{-1})^T B_i P^{-1}$. 则 $A_i^T=(P^{-1})^T\cdot B_i^T\cdot P^{-1}=(P^{-1})^T B_i P^{-1}=A_i$ 即 $A_i \in SM_n(F)$

$\because$ P 满秩, $\therefore$ $\mathrm{rank}\,A_i=\mathrm{rank}\,B_i=1$. $\boxtimes$

LA2-5 引理8.5

注: (1) 打洞引理: $\forall A\in M_n(\mathbb{R})$, $r=\mathrm{rank}(A)$, $\exists P, Q \in GL_n(\mathbb{R})$ 初等矩阵的乘积.

s.t. $PAQ=\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0\end{pmatrix}$ 但用在此题中并不足以说明对称性.

(2) 正交相似变换只用于实对称阵.

$\exists P\in GL_n(F)$ s.t. $P^t A P=\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0\end{pmatrix}$ 当 $F=\mathbb{C}$ 时成立. 此题并没有限制是什么域.

1. 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, $g, h \in V^*$. 函数 $f : V \times V \to F$ 由公式

$$f(x, y) = g(x)h(y)$$

定义.

(i) 验证 $f(x, y)$ 是双线性型;

(ii) 计算 $\operatorname{rank}(f)$;

(iii) 验证 $q(x) = g(x)^2$ 是 V 上的二次型.

解: (i) $\forall \alpha, \beta \in F$. $\forall x, y, z \in V$.

$$f(\alpha x+\beta y, z) = g(\alpha x+\beta y)\cdot h(z) = (\alpha g(x)+\beta g(y))\cdot h(z) = \alpha g(x)\cdot h(z)+\beta g(y)\cdot h(z)$$

$$= \alpha f(x,z)+\beta f(y,z)$$

$$f(x, \alpha y+\beta z) = g(x)\cdot h(\alpha y+\beta z) = g(x)\cdot(\alpha h(y)+\beta h(z)) = \alpha g(x)h(y)+\beta g(x)h(z)$$

$$= \alpha f(x,y)+\beta f(x,z)$$

故 $f(x,y)$ 是双线性型.

(ii)

f 在基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 下的矩阵为 $A = (g(v_i)\cdot h(v_j))_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix} g(v_1) \\ \vdots \\ g(v_n) \end{pmatrix} (h(v_1) \cdots h(v_n))$.

$\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(A) \le 1$

若 $g=0^*$ 或 $h=0^*$ 则 $\operatorname{rank}(f)=0$ 否则 $\operatorname{rank}(f)=1$

(iii) 若 $g=h$. 则 $f(x,y)=g(x)g(y)$. $f(x,y)=f(y,x) \Rightarrow f\in \mathcal{L}_2^+(V)$

$\because \forall x\in V$. $q(x)=g(x)^2=f(x,x)$ $\therefore q(x)$ 是 V 上的二次型. (由命题 8.3).

q 的配极是 f

另: (1) $\forall x\in V$, $q(x)=q(-x)$ (2) $\forall x,y\in V$, $f(x,y)=\frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))$ 是 V 的对称双线性型

另: 设 V 的一组基为 $\{v_1,\cdots,v_n\}$. $\forall x\in V$ $x=(v_1\cdots v_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ $x_i\in F$.

$g(v_i)=g_i\in\mathbb{F}$ $\quad g(x)=g_1x_1+\cdots+g_nx_n$

$q(x)=g(x)^2=(g_1x_1+\cdots+g_nx_n)^2$ 是关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的齐二次多项式.

2. 设 $q(\boldsymbol{x})=x_1^2-x_1x_2+3x_3x_2+10x_4x_3-2x_4^2$ 是 $\mathbb{Q}^4$ 上的二次型. 计算 q 在标准基下的矩阵和 $\operatorname{rank}(q)$.

解: $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3+x_4\vec{e}_4$.

q 在标准基下的矩阵为: $\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0\\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 5\\ 0 & 0 & 5 & -2\end{pmatrix}$ 经过初等行(列)变换可得:

$\operatorname{rank}(q)=4$.

3. 设 $q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的二次型. 计算 q 的一组规范基和在该基下的规范型, 并求出 q 的签名.

解: $q(x)$ 在标准基的矩阵为 $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$$(Q|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第1行加到第2行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{对称操作}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第1行通乘(-1)加到第3行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{对称操作}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{第2行通乘2加到第3行}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{对称操作}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

令 $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ 则 $P^tQP=\mathrm{diag}(1,-1,0)$

错误：化为 $\begin{pmatrix}1&&\\&-4&\\&&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix}$, …

规范基 $(\vec{\varepsilon}_1\ \vec{\varepsilon}_2\ \vec{\varepsilon}_3)=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\cdot P$ 即

$\vec{\varepsilon}_1=(1\ 0\ 0)^t$, $\vec{\varepsilon}_2=(1\ 1\ 0)^t$, $\vec{\varepsilon}_3=(1\ 2\ 1)^t$.

q 的签名为 $(1,1)$

另：

配方法：$q(\vec{x})=x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$=(x_1^2-2x_1x_2+2x_1x_3)-3x_3^2+2x_2x_3$

$=(x_1-x_2+x_3)^2-x_2^2-4x_3^2+4x_2x_3$

$=(x_1-x_2+x_3)^2-(x_2-2x_3)^2$

令 $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}}_{P^{-1}}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 则 $q(\vec{x})=(y_1\ y_2\ y_3)\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

错误：$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\overbrace{\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\end{pmatrix}}^{P}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

规范基 $(\vec{\varepsilon}_1\ \vec{\varepsilon}_2\ \vec{\varepsilon}_3) = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)P$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注: $(\vec{\varepsilon}_1 \cdots \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n) \cdot P$

$$\vec{x} = (\vec{\varepsilon}_1 \cdots \vec{\varepsilon}_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n) \cdot P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$q(\vec{x}) = (x_1 \cdots x_n) \cdot A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (y_1 \cdots y_n)\, P^T A P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

4. 设

$$q\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X \longmapsto \mathrm{tr}(X^t X).$$

证明 q 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上的二次型并求 q 的签名.

证明：从坐标表示的角度：

维数是 n^2

$M_n(\mathbb{R})$ 上有一组标准基 $\{E_{11},\cdots,E_{1n},\cdots,E_{n1},\cdots,E_{nn}\}$

设 $X=(x_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ 即 $X=\sum_{i,j} x_{ij}E_{ij}$，$q(X)=\mathrm{tr}(X^tX)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{ji}^2$ 一齐二次多项式.

q 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的二次型，其签名为 $(n^2,0)$　注：$\forall X\neq 0$ $q(X)>0$. q 是正定的.

签名是 $(n^2,0)$.

从定义的角度：

设 $f: M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$

$(X,Y) \longmapsto \mathrm{tr}(X^tY)$.

首先验证 f 是 $M_n(\mathbb{R})$ 上的对称双线性型

$\forall X,Y\in M_n(\mathbb{R})$，$f(X,Y)=\mathrm{tr}(X^tY)=\mathrm{tr}(Y^tX)=f(Y,X)$

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \forall X,Y,Z\in M_n(\mathbb{R})$, $f(\alpha X+\beta Y,Z)=tr((\alpha X+\beta Y)^t\cdot Z) = \alpha f(X,Z)+\beta f(Y,Z)$.

$$f(X,\alpha Y+\beta Z)=tr(X^t\cdot(\alpha Y+\beta Z)) = \alpha f(X,Y)+\beta f(X,Z).$$

$q(X)=f(X,X)$ 是 $M_n(\mathbb{R})$上的二次型.

f 在标准基$\{E_{1,1},\cdots,E_{1,n},\cdots,E_{n,1},\cdots,E_{nn}\}$下的矩阵为 I_{n^2}.

事实上: $\forall i,j$. $f(E_{i,j},E_{i,j}) = tr(E_{i,j}^t\cdot E_{i,j}) = tr(E_{j,j}) = 1$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & i & \end{array} \\ j & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & j & \end{array} \\ i & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

若 $i\neq i'$ 或 $j\neq j'$ 则. $f(E_{i,j},E_{i',j'}) = tr(E_{ij}^t\cdot E_{i',j'}) = 0$.

另: $\forall X\in M_n(\mathbb{R})$, $q(-X)=tr(-X^t\cdot(-X))=q(X)$

令 $f(X,Y)=\frac{1}{2}(q(X+Y)-q(X)-q(Y))=\frac{1}{2}\Big(tr\big((X+Y)^t\cdot(X+Y)\big)-tr(X^t\cdot X)-tr(Y^t\cdot Y)\Big)$

$$=\frac{1}{2}(tr(X^t\cdot Y)+tr(Y^t\cdot X)) = tr(X^t\cdot Y)$$

验证 $f\in \mathcal{L}_2^+(M_n(\mathbb{R}))$

5. 设 q 是 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 中非零齐二次多项式. 证明 q 在 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 中可约当且仅当 $\mathrm{rank}(q)\le 1$ 或者 q 的签名是 $(1,1)$.

证明.

"$\Leftarrow$": 当 q 的签名为 $(1,1)$ 时. 存在可逆坐标变换 $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$q(x_1,\dots,x_n) = y_1^2 - y_2^2 = (y_1+y_2)(y_1-y_2)$

故 q 在 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 中可约.

当 $\mathrm{rank}(q)=1$ 时. 则 $q(x_1,\dots,x_n) = y_1^2$ 或 $-y_1^2$

故 q 在 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 中可约.

"$\Rightarrow$" 若 q 在 $\mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ 中可约. 那么存在 $q = f\cdot g$.

$f = \alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n$. $g = \beta_1x_1+\dots+\beta_nx_n$

其中 $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ 不全为零. $\beta_1,\dots,\beta_n\in\mathbb{R}$ 不全为零.

q 作为 $\mathbb{R}^n$ 上的二次型. 其在标准基下的矩阵为

$$A = \left(\frac{\alpha_i\beta_j+\alpha_j\beta_i}{2}\right)_{n\times n}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}(\beta_1 \cdots \beta_n) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots \\ \beta_n\end{pmatrix}(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$$

$\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

$\Rightarrow \mathrm{rank}(A) \leq 2 \Rightarrow \mathrm{rank}(q) \leq 2$

① $\mathrm{rank}(q) \leq 1$

② 若 $\mathrm{rank}(q) = 2$

则 q 的签名为 $(1\ 1)$ 或 $(2\ 0)$ 或 $(0\ 2)$

另：若 $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ s.t. $f = \lambda g$.

则 $q = \lambda \cdot f^2$. 令 $y_1 = f$, $y_2 = x_2, \cdots, y_n = x_n$.

$q = \lambda y_1^2 \Rightarrow \mathrm{rank}(q) \leq 1$.

可逆的线性坐标变换

若不存在 $\lambda \in \mathbb{R}^*$ s.t. $f = \lambda g$.

则 $f = y_1 + y_2 \Rightarrow y_1 = \frac{f+g}{2}$, $y_2 = \frac{f-g}{2}$

$g = y_1 - y_2$

$q = y_1^2 - y_2^2$ 签名为 $(1,1)$.

当 q 的签名为 $(2\ 0)$ 则 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^t A P = \mathrm{diag}(1\ 1\ 0 \cdots 0)$

即 $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$ 由 $q(x_1 \cdots x_n) = y_1^2 + y_2^2$ 在 $\mathbb{R}[y_1, \cdots, y_n]$ 上不可约矛盾.

注：可逆的坐标变换并不改变其可约性.

同理 q 的签名不可能为 $(0, 2)$

结合 "$\Leftarrow$" 方向证明，$\mathrm{rank}(q) = 2$ 时 q 的签名只能是 $(1, 1)$. ☒