1. 设 V 是域 F 上的线性空间, 设 $f\colon V\times V\to F$ 为双线性函数, 且对任意的 $\alpha\in V$ 都有 $f(\alpha,\alpha)=0$, 求证: f 是斜对称的.

Pf: 要证: $f(x,y)=-f(y,x)$, $\forall x,y\in V$

$f(x+y,x+y)=f(x+y,x)+f(x+y,y)$

$=f(x,x)+f(y,x)+f(x,y)+f(y,y)$

$=f(y,x)+f(x,y)=0$

$\Rightarrow f(y,x)=-f(x,y)$

所以 f 是斜对称的 $\Box$

2. 设

$$f\colon \mathrm{M}_2(F)\times\mathrm{M}_2(F)\longrightarrow F$$
$$(A,B)\longmapsto \mathrm{tr}(AB).$$

(1) 验证 f 是 $\mathrm{M}_2(F)$ 上的对称双线性型;

(2) 求 f 在基底 $E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}$ 下的矩阵, 并求 $\mathrm{rank}(f)$.

证: $\forall A,B\in M_2(F)$ $\quad f(\alpha A+\beta B,C)=\alpha f(A,C)+\beta f(B,C)$

下证 $f(A,B)=f(B,A)$, 也就是 $tr(AB)=tr(BA)$

设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$

则 $AB=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}, & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}\\b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}\end{pmatrix}$

则 $\operatorname{tr}(AB) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$

$\operatorname{tr}(BA) = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}$

所以 f 是 $M_2(F)$ 上的双线性型.

(2) 设 f 在此基底下的矩阵为 A, 则

$$A = \begin{pmatrix} f(E_{1,1},E_{1,1}) & f(E_{1,1},E_{1,2}) & f(E_{1,1},E_{2,1}) & f(E_{1,1},E_{2,2}) \\ f(E_{1,2},E_{1,1}) & f(E_{1,2},E_{1,2}) & f(E_{1,2},E_{2,1}) & f(E_{1,2},E_{2,2}) \\ f(E_{2,1},E_{1,1}) & f(E_{2,1},E_{1,2}) & f(E_{2,1},E_{2,1}) & f(E_{2,1},E_{2,2}) \\ f(E_{2,2},E_{1,1}) & f(E_{2,2},E_{1,2}) & f(E_{2,2},E_{2,1}) & f(E_{2,2},E_{2,2}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}(f) = \operatorname{rank}(A) = 4$

3. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_3(\mathbb{R}),$$

利用行列相伴消元把 A 化成对角阵 B, 并计算 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^t AP$.

解:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{4}{5}} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & -1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & 4 \\ 1 & \frac{1}{5} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

φ.

4. 设

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

求 $P \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ 使得

$$P^t A P = B.$$

Pf: 设 $P = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

则 $P^t A P = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2c_{11} & 2c_{21} \\ 2c_{12} & 2c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2c_{11}^2 + 2c_{21}^2 & 2c_{11}c_{12} + 2c_{21}c_{22} \\ 2c_{12}c_{11} + 2c_{22}c_{21} & 2c_{12}^2 + 2c_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_{11}^2 + 2c_{21}^2 = 10 \\ 2c_{11}c_{12} + 2c_{21}c_{22} = 0 \\ 2c_{12}^2 + 2c_{22}^2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_{11}^2 + c_{21}^2 = 5 \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0 \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 = 5 \end{cases}$$

所以有 $|c_{11}| = |c_{22}| \quad |c_{21}| = |c_{12}|$

且 $\{c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}\}$ 中有3个数字同号（同正或同负），剩下1个不同号

eg: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ……

5. 证明: 秩为 r 的对称矩阵可以表达成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

证: 秩为 r 的对称矩阵, 存在一组规范基使得 f 在该基下的矩阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$ (推论 7.(6))

设此对称矩阵为 A, 则存在 P 可逆使得 $P^tAP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$

从而 $P^tAP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$

P, P^t 可逆 且 $(P^t)^{-1}=(P^{-1})^t$

$$A=\underbrace{(P^{-1})^t\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}P^{-1}}_{B_1}+\underbrace{(P^{-1})^t\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}P^{-1}}_{B_2}+\cdots+\underbrace{(P^{-1})^t\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0\end{pmatrix}P^{-1}}_{B_r}$$

而且 $\left((P^{-1})^t\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}P^{-1}\right)^t$ 其中 $1\leq i\leq r$

$=(P^{-1})^t\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}P^{-1}$, 所以 B_i 是对称矩阵.

又因为 P 可逆所以 $\mathrm{rank}(B_i)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix}=1$ $\square$

1. 设 V 是域 F 上的有限维线性空间, $g, h \in V^*$. 函数 $f : V \times V \to F$ 由公式

$$f(x,y) = g(x)h(y)$$

定义.

(i) 验证 $f(x,y)$ 是双线性型;

(ii) 计算 $\mathrm{rank}(f)$;

(iii) 验证 $q(x) = g(x)^2$ 是 V 上的二次型.

证. (1) $\forall \alpha, \beta \in F$, $x, y, z \in V$

$$f(\alpha x+\beta y, z) = g(\alpha x+\beta y)\cdot h(z) = (\alpha g(x)+\beta g(y))h(z)$$

$$= \alpha g(x)h(z) + \beta g(y)h(z)$$

同理 $f(x, \alpha y+\beta z) = \alpha f(x,y) + \beta f(x,z)$.

(2) 设 V 的一组基为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$

则 $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ $\quad y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$, $\quad x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in F$

$$f(x,y) = g(x)h(y) = g(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n)\, h(y_1e_1 + \cdots + y_ne_n)$$

$$= (x_1g(e_1) + \cdots + x_ng(e_n))(y_1h(e_1) + \cdots + y_nh(e_n))$$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \underbrace{\begin{pmatrix} g(e_1) \\ \vdots \\ g(e_n) \end{pmatrix} (h(e_1), \cdots, h(e_n))}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

双线性型 $f(x,y)$ 对应的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} g(e_1) \\ \vdots \\ g(e_n) \end{pmatrix} (h(e_1), \cdots, h(e_n))$

$\mathrm{rank}(A) \le \min\{1,1\} = 1$, 若 g 或 $h=0$ 则 $\mathrm{rank}(A)=0$, 若 $g, h \ne 0$, 则 $\mathrm{rank}(A)=1$

法二: 直接构造 $f(x,y)$ 对应的矩阵 $A = (f(e_i, e_j))_{n\times n} = (g(e_i)h(e_j))_{n\times n}$

所以 $A = \begin{pmatrix} g(e_1)h(e_1) & g(e_1)h(e_2) & \cdots & g(e_1)h(e_n) \\ g(e_2)h(e_1) & g(e_2)h(e_2) & \cdots & g(e_2)h(e_n) \\ \vdots & & & \\ g(e_n)h(e_1) & \cdots & \cdots & g(e_n)h(e_n) \end{pmatrix}$

显然 $\operatorname{rank}(A)=1$，所以 $\operatorname{rank}(f)=1$.

(3). 设 $\phi: V\times V \longrightarrow F$

$\phi(x,y)=g(x)g(y)$

由(1)知 ϕ 为双线性型，又因为 $\phi(x,y)=g(x)g(y)=g(y)g(x)=\phi(y,x)$

所以 ϕ 为对称双线性型，此时 $q(x)=\phi(x,x)=g(x)^2$

所以 $q(x)$ 是二次型.

法二：由定义：$q(-x)=g(-x)^2 \underset{g\text{线性}}{=} (-g(x))^2=g(x)^2$

$$h(x,y)=\frac{1}{2}\left(q(x+y)-q(x)-q(y)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(g(x+y)^2-g(x)^2-g(y)^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left((g(x)+g(y))^2-g(x)^2-g(y)^2\right)$$

$$=g(x)g(y)$$

易证 $h(x,y)$ 为对称双线性型 $\square$

2. 设 $q(\boldsymbol{x})=x_1^2-x_1x_2+3x_3x_2+10x_4x_3-2x_4^2$ 是 $\mathbb{Q}^4$ 上的二次型. 计算 q 在标准基下的矩阵和 $\operatorname{rank}(q)$.

解：$q(x)$ 对应的矩阵为
$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

作初等变换：
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{43}{9} \end{pmatrix}$$

所以 $\operatorname{rank}(q)=4$

3. 设 $q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的二次型. 计算 q 的一组规范基和在该基下的规范型, 并求出 q 的签名.

解:(法一) $q(x)$ 在标准基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

做行列相伴变换: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{列} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{行} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{列} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow q\text{的规范型为 } x_1^2 - x_2^2$$

所以 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 规范基为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

注： $q = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3$

$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ 则 $q = y_1^2 - y_2^2$ 为规范型.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$q = (x_1, x_2, x_3)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (y_1, y_2, y_3) \cdot P^t A P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

所以规范基为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. 设

$$q\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$X \longmapsto \mathrm{tr}(X^t X).$$

证明 q 是 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上的二次型并求 q 的签名.

证明. 取映射 $\phi: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$\phi(X, Y) = \mathrm{tr}(X^t Y)$ $\qquad \phi(X,Y) = X^T A Y$

验证 ϕ 为对称双线性型.

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \phi(\alpha X+\beta Y, Z) = tr((\alpha X+\beta Y)^t Z)$

$= tr((\alpha X^t+\beta Y^t)Z) = tr(\alpha X^tZ+\beta Y^tZ)$

$= \alpha\, tr(X^tZ)+\beta\, tr(Y^tZ) = \alpha\phi(X,Z)+\beta\phi(Y,Z)$

同理 $\phi(X, \alpha Y+\beta Z) = \alpha\phi(X,Y)+\beta\phi(X,Z)$

且 $\phi(X,Y) = tr(X^tY) = tr(Y^tX) = \phi(Y,X)$

则 $q(X) = \phi(X,X) = tr(X^tX)$，所以 q 是二次型

对 $\forall X = (a_{ij})_{n\times n}\in M_n(\mathbb{R})$

$$X^tX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{13} & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{21}^2+\cdots+a_{n1}^2 & & & \\ & a_{12}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{n2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{1n}^2+\cdots+a_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

所以 $tr(X^tX) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2$

对任意的非零矩阵 X 有 $tr(X^tX) > 0$

所以 q 正定.

矩阵 X 在标准基 E_{ij} 下的坐标为

$(a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots a_{nn})$

所以 $q(X) = (a_{11} \cdots\cdots a_{nn})\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}_{n^2\times n^2}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$

q 的签名为 $(n^2, 0)$ □

5. 设 q 是 $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ 中非零齐二次多项式. 证明 q 在 $\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_n]$ 中可约当且仅当 $\mathrm{rank}(q)\le 1$ 或者 q 的签名是 $(1,1)$.

证: 回顾 例8.11. q 可以分解为两个一次多项式之积 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(q)<3$.

"$\Leftarrow$" 设 $q(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 则 $A\in SM_n(\mathbb{R})$

则存在 $P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $P^tAP=\begin{pmatrix}E_k&0&0\\0&-E_\ell&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

令 $\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ 其中 $Q=(q_{ij})=P^{-1}$

则 $q(x_1,\ldots,x_n)=(y_1,\ldots,y_n)P^tAP\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$=(y_1,\ldots,y_n)\begin{pmatrix}E_k&0&0\\0&E_\ell&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

若 $\mathrm{rank}(q)\le 1$ 因为 $q\ne 0$ 所以 $\mathrm{rank}(q)=1$.

则 $q(x_1,\ldots,x_n)=y_1^2=(q_{11}x_1+\cdots+q_{1n}x_n)^2$ 可约

若 q 的签名为 $(1,1)$ 则 $q(x_1,\ldots,x_n)=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2)$

把 $y_1=q_{11}x_1+\cdots+q_{1n}x_n$ 和 $y_2=q_{21}x_1+\cdots+q_{2n}x_n$ 带入上式得到

f 的因式分解.

$\Rightarrow$ 设 $q=fg$, 其中 f,g 是 $F[x_1,\ldots,x_n]$ 中的齐一次多项式.

令 $f=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$ $\quad g=\beta_1x_1+\cdots+\beta_nx_n$

若 f 与 g 线性相关, 即 $\exists\lambda\in\mathbb{R}$ s.t. $f=\lambda g$

则 $q=\lambda g^2$ 令 $y_1=\beta_1x_1+\cdots+\beta_nx_n$ 则 $q=\lambda y_1^2$

则 $\operatorname{rank}(q) \le 1$

若 f, g 线性无关，令 $y_1 = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$，$y_2 = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n$

则 $q = fg = \dfrac{(y_1+y_2)^2 - (y_1-y_2)^2}{4}$

再令 $z_1 = \dfrac{y_1+y_2}{2}$　$z_2 = \dfrac{y_1-y_2}{2}$

则 $q = z_1^2 - z_2^2$　从而 q 的符号差为 $(1, 1)$

$\square$