1. 将数域 $\mathbb{C}$ 上的无穷数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 全体组成的集合看作 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 W. 定义 W 中任意两个数列的加法 $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$ 及数乘 $\lambda\{a_n\}=\{\lambda a_n\}$, $\lambda\in\mathbb{C}$. 如下集合 V 是否组成 W 的一个子空间? 如果是, 求出它的维数及一组基.

(1) W 中所有等比数列组成的集合.

(2) W 中所有等差数列组成的集合.

解：(1) 任一等比数列可由其首项和相邻两项之比唯一决定

设 $\{a_n\}_{n\geq1}$、$\{b_n\}_{n\geq1}$ 为 W 中的等比数列，公比分别为 $q_a, q_b \in \mathbb{C}^*$

那么 $a_n = a_1 q_a^{n-1}$，$b_n = b_1 q_b^{n-1}$

若 $q_a \neq q_b$，则 $a_n + b_n = a_1 q_a^{n-1} + b_1 q_b^{n-1}$，$\{a_n+b_n\}_{n\geq1}$ 不是等比数列.

因此 W 中所有等比数列组成的集合对加法不封闭，不构成 W 的线性子空间.

$\dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{a_n+b_n} = \dfrac{q_a\cdot a_n + q_b\cdot b_n}{a_n+b_n}$ 不是常数……

$q\neq0$ $\{1,q,q^2,\cdots\}+\{1,-q,q^2,\cdots\}$

$=\{2,0,2q^2,\cdots\}$ 不是等比数列.

另：$\{0,0,\cdots\}$ 不是等比数列.

(2) 任一等差数列可由其首项和相邻两项之差唯一决定.

验证此集合对加法和数乘封闭. $\forall \alpha,\beta\in F$. $\vec{x},\vec{y}\in W$ 有 $\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}\in W$.

任取 $\{a_n\}_{n\geq1}$ 和 $\{b_n\}_{n\geq1}$ 为 W 中的等差数列. 公差分别为 $d_a, d_b\in\mathbb{C}$.

那么 $a_n = a_1 + d_a(n-1)$. $b_n = b_1 + d_b(n-1)$.　$(a_{n+1}+b_{n+1})-(a_n+b_n) = (a_{n+1}-a_n)+(b_{n+1}-b_n) = d_a+d_b$

$a_n+b_n = (a_1+b_1)+(d_a+d_b)(n-1)$. $\{a_n+b_n\}_{n\geq 1}$ 是首项为 a_1+b_1 公差为 d_a+d_b 的等差数列。

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$. $\lambda \cdot a_n = \lambda \cdot a_1 + \lambda \cdot d_a(n-1)$

故 $\{\lambda a_n\}_{n\geq 1}$ 是首项为 $\lambda \cdot a_1$, 公差为 $\lambda \cdot d_a$ 的等差数列.

综上: W 中所有等差数列组成的集合是 W 的子空间 V.

$$V \cong \mathbb{C}[n]^{(2)} = \{c+dn \mid c,d\in\mathbb{C}\}.$$

$\dim_{\mathbb{C}} V = 2$. V 的一组基为 $\{\{1\},\{n\}\} = \{\{1,1,\cdots\},\{1,2,3,\cdots\}\}$.

$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C}$　$\{a_1, a_2, \cdots\}$. 唯一确定一个等差数列. 或 $\{\{1,1,\cdots\},\{0,1,2,\cdots\}\}$.

σ: 等差数列子空间 $V \to \mathbb{C}^2$.　线性同构　首项是1 公差是0　首项是0, 公差为1.

$\{a_n\}_{n\geq 1} \mapsto (a_1, a_2)$　或 $\{\{0,1,2,3,\cdots\},\{1,0,-1,-2,\cdots\}\}$

注: 书写问题, 一组基 $\{\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}\}$

2. 设 W_1 和 W_2 分别是 $\mathbb{Q}$ 上线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间. 求 $W_1 \cap W_2$ 的一组基, 并由此分别扩充为 W_1 和 W_2 的一组基.

解: W_1: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + x_4 \\ x_2 = -2x_3 - x_4 \end{cases}$

$$W_1 = \left\{ \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_{1,1}} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_{1,2}} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{Q} \right\}$$

W_2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4x_3 + 4x_4 \\ x_2 = -4x_3 - 3x_4 \end{cases}$

$$W_2 = \left\{ \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_{2,1}} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_{2,2}} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{Q} \right\}$$

$\vec{v} \in W_1 \cap W_2$ $\quad \vec{v} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -4 \\ -2 & -1 & +4 & +3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取 $\vec{v} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \vec{v}_{1,2} - \vec{v}_{1,1} = \vec{v}_{2,2} - \vec{v}_{2,1}$

$\downarrow$ 初等行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = -\mu_2.$

$\mu_1 = +\mu_2$

$\lambda_2 = -\mu_2.$

$W_1 \cap W_2 = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{C} \right\}$

注意到 $\mathrm{Sol}(H) \cong W_1 \cap W_2$.

$\vec{W}_1$ 的一组基为 $\{\vec{v}, \vec{v}_{1,1}\}$ $\vec{W}_2$ 的一组基为 $\{\vec{v}, \vec{v}_{2,1}\}$.

另: 联立两个线性方程组来解 $W_1 \cap W_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

注: 计算问题. 代入验证.

3. 设 $d \in \mathbb{Z}^+$ 和 $\mathbb{R}[x]^{(d)} = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) < d\}$. 定义映射

$$\phi\colon \mathbb{R}[x]^{(d)} \longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(d)}$$
$$f \longmapsto x\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) - f(x).$$

证明 ϕ 是线性映射, 并分别求其核空间和像空间的一组基.

证明: 对任意的 $f, g \in \mathbb{R}[x]^{(d)}$, $\phi(f+g) = x\frac{d}{dx}(f+g) - (f+g)$

$= x\frac{d}{dx}(f) + x\frac{d}{dx}(g) - f - g$

$= (x\frac{d}{dx}(f) - f) + (x\frac{d}{dx}(g) - g)$

$= \phi(f) + \phi(g)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$. $\phi(\lambda \cdot f) = x\frac{d}{dx}(\lambda \cdot f) - \lambda \cdot f = \lambda(x\frac{d}{dx}(f) - f) = \lambda \cdot \phi(f)$.

等价于验证: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}[x]^{(d)}$, $\phi(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\phi(\vec{u}) + \beta\phi(\vec{v})$.

由此 ϕ 是线性映射.

设 $f \in \ker(\phi)$. $f = a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$

由 $\phi(f) = x\frac{d}{dx}(f) - f = 0$. 得: $x((d-1)a_{d-1}x^{d-2} + \cdots + a_1) - (a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = 0$.

可得 $a_0 = 0$, $\forall i = 1, \cdots, d-1$. $(i-1)a_i = 0 \Rightarrow \forall i = 2, \cdots, d-1$. $a_i = 0$.

$f = a_1 x \in \mathbb{R}[x]$. 又由 $\phi(a_1 x) = 0$. 故 $\ker(\phi)$ 的一组基为 $\{x\}$.

$\mathbb{R}[x]^{(d)}$ 的一组基为 $\{1, x, \cdots, x^{d-1}\}$.

由 $\phi(1) = -1$, $\phi(x) = 0$, $\phi(x^2) = x\cdot 2x - x^2 = x^2$, $\cdots$, $\phi(x^{d-1}) = (d-2)x^{d-1}$.

$Im(\phi)$ 的一组生成元为 $\{-1, x^2, \cdots, x^{d-1}\}$ 又由 $\{1, x^2, \cdots, x^{d-1}\}$ 是 $Im(\phi)$ 中线性无关组.

因此 $Im(\phi)$ 的一组基为 $\{1, x^2, \cdots, x^{d-1}\}$.

注: 当 $d=1$ 时 $\ker(\phi) = \{0\}$. $Im(\phi) = \langle 1 \rangle$.

设 $\mathcal{A}: U \to V$ F上有限维空间的线性映射.

M 是 U 的一组基 $\not\Rightarrow$ $\mathcal{A}(M)$ 是 $Im\mathcal{A}$ 的一组基.

M 是 U 的一组生成元 $\Rightarrow$ $\mathcal{A}(M)$ 是 $Im\mathcal{A}$ 的一组生成元

设 $\ker\mathcal{A}$ 有一组基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$, $S = \{u_1, \cdots, u_t\}$ 是 U 的一个向量组. $\mathcal{A}(S) = \{\mathcal{A}(u_1), \cdots, \mathcal{A}(u_t)\}$.

$M = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_s, u_1, \cdots, u_t\}$. 那么下面两个命题成立.

(1) M 线性无关 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}(S)$ 线性无关.

(2) M 是 U 的基 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}(S)$ 是 $Im\mathcal{A} = \mathcal{A}(U)$ 的一组基.

此处省略推导.

4. 设 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ 两两不相等, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. 求证: 存在唯一一个次数低于 n 的多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $f(x_i) = y_i$ 对 $1 \le i \le n$ 成立. 并简述如何求解 $f(x)$.

证明：法1：待定系数法：未定元 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde 矩阵}}\overset{:=V}{\vphantom{x}}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

由 $x_i \neq x_j$. $|V| = \prod\limits_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0$.

故该非齐次线性方程组有唯一解:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = V^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

法2：构造线性映射：$\sigma : \mathbb{C}[x]^{(n)} \longrightarrow \mathbb{C}^n$

$$f(x) \longmapsto (f(x_1), \cdots, f(x_n))$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ $f, g \in \mathbb{C}[x]^{(n)}$ $\quad \sigma(\alpha f + \beta g) = (\alpha \cdot f + \beta g(x_1), \cdots, \alpha \cdot f + \beta \cdot g(x_n))$

$$= \alpha(f(x_1), \cdots f(x_n)) + \beta(g(x_1), \cdots, g(x_n))$$

$$= \alpha\sigma(f) + \beta\sigma(g).$$

断言：σ 是单射. 设 $f\in\mathbb{C}[x]^{(n)}$, $\sigma(f)=\vec{0}$. 即 $f(x_i)=0\ \forall i=1,\cdots,n$

由代数学基本定理可得：$f=0$. 即 $\ker(\sigma)=\{0\}$.

又由 $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[x]^{(n)}=\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n=n$. σ 是双射. 即线性同构.

要求解：$\sigma^{-1}((y_1,\cdots,y_n))$. 设 $\vec{e}_i=(0,\cdots,\underset{\text{第 }i\text{ 个分量}}{1},0,\cdots,0)$ $\quad (y_1,\cdots,y_n)=(y_1\cdots y_n)\begin{pmatrix}\vec{e}_1\\ \vdots\\ \vec{e}_n\end{pmatrix}$

$$\sigma^{-1}((y_1,\cdots,y_n))=(\sigma^{-1}(\vec{e}_1)\cdots\sigma^{-1}(\vec{e}_n))\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

问题转化为求解 $l_i=\sigma^{-1}(\vec{e}_i)\ \forall i=1,\cdots,n$. $\quad l_i(x_j)=\delta_{i,j}$

由Bézout关系式

$\because \gcd(x-x_i,\prod_{j\neq i}(x-x_j))=1\ \therefore \exists u_i,v_i\in\mathbb{C}[x],\deg(v_i)<1$ s.t. $u_i(x-x_i)+v_i\prod_{j\neq i}(x-x_j)=1$.

取 $l_i=v_i\prod_{j\neq i}(x-x_j)$ 则 $l_i(x_j)=0\ \forall j\neq i$. 等式两边同时赋值 $x=x_i$ 得：$l_i(x_i)=1$.

注意到：$\deg(v_i)=0$. $\quad v_i=\dfrac{1}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}\in\mathbb{C}$. 那么 $l_i=\prod_{j\neq i}\dfrac{x-x_j}{x_i-x_j}$, $\deg(l_i)=n-1$.

故取 $f=(l_1,\cdots,l_n)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ 即可 —— Lagrange 插值公式.

牛顿插值公式：

自然基：$\{1, x, \cdots, x^{n-1}\}$.

换一组基：$\{1, (x-x_1), (x-x_1)(x-x_2), (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3), \cdots, (x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\}$.

$$f = C_0 + C_1(x-x_1) + C_2(x-x_1)(x-x_2) + \cdots + C_{n-1}(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}).$$

$$f(x_1) = C_0 = y_1$$

$$f(x_2) = C_0 + C_1(x_2-x_1) = y_2 \Rightarrow C_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$\cdots$

$$f(x_n) = y_n \Rightarrow C_{n-1} = \cdots$$

$$\Delta(x^{\underline{n}}) = (x+1)x\cdots(x-n+2) - x(x-1)\cdots(x-n+1) = nx^{\underline{n-1}}$$

中国剩余定理：
$$\begin{cases} x \equiv y_1 \mod 3 \\ x \equiv y_2 \mod 5 \\ x \equiv y_3 \mod 7. \end{cases}$$

y_1, y_2, y_3 任意非负整数.

存在唯一非负整数解：$x \leq 3\times5\times7 = 105$

存在
$$\begin{cases} x_1 \equiv 1 \mod 3 \\ x_1 \equiv 0 \mod 5 \\ x_1 \equiv 0 \mod 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \equiv 0 \mod 3 \\ x_2 \equiv 1 \mod 5 \\ x_2 \equiv 0 \mod 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \equiv 0 \mod 3 \\ x_3 \equiv 0 \mod 5 \\ x_3 \equiv 1 \mod 7 \end{cases}$$

$$x = y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 \mod 105$$

5. 设 V 是域 F 上的线性空间.

(1) 设 V_1, V_2 是 V 的子空间. 证明: $V = V_1 \cup V_2$ 蕴含 $V = V_1$ 或 $V = V_2$.
(提示: 参见上学期第十二次作业第 5 题或期末考试 A 卷第 6 题).

(2) (选做) 设 F 的特征等于零. 证明: V 不可能是有限个真子空间的并.
(谨此告别无穷维线性空间).

证明: (1) 反证法: 假设 $V \neq V_1$ 且 $V \neq V_2$.

即 $\exists x_1 \in V_1$ 且 $x_1 \notin V_2$, $\exists x_2 \in V_2$ 且 $x_2 \notin V_1$.

那么 $x_1 + x_2 \in V = V_1 \cup V_2$. $\Rightarrow$ $x_1 + x_2 \in V_1$ 或 $x_1 + x_2 \in V_2$.

若 $x_1 + x_2 \in V_1$ 则 $x_2 \in V_1$ $\rightarrow\leftarrow$. 若 $x_1 + x_2 \in V_2$ 则 $x_1 \in V_2$ $\rightarrow\leftarrow$.

故 $V = V_1$ 或 $V = V_2$.

(2) 设 $V_1, V_2, \cdots$, 是 V 的一列非零的真子空间.

下面证明 $\exists x \in V$ 使得 $x \notin V_1 \cup \cdots \cup V_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$.

对 n 归纳:

由(1) 当 $n=2$ 时结论成立. 假设结论对 $n=s$ 成立. 下面证明 $n=s+1$ 时结论成立.

由归纳假设, $\exists x \notin V_1 \cup \cdots \cup V_s$ 若 $x \notin V_{s+1}$ 那么 $x \notin V_1 \cup \cdots \cup V_{s+1}$. (证明完毕).

若 $x \in V_{s+1}$, 取 $y \in V$ 且 $y \notin V_{s+1}$.

或 $x+y$，$2x+y$，…，$sx+y$，$(s+1)x+y$.

考虑：$x+y$，…，$x+(s-1)y$，$x+s\cdot y$，$x+(s+1)y$，这 $s+1$ 个不同的元素首先不在 V_{s+1} 中.

假设它们都在 $V_1\sqcup\cdots\sqcup V_s$ 中，必然有两个元素在同一子空间 V_j 中，那么得到 $y\in V_j \Rightarrow x\in V_j$ $\to\leftarrow$.

必然有一个元素不在 $V_1\sqcup\cdots\sqcup V_s$ 中，那么也不在 $V_1\sqcup\cdots\sqcup V_{s+1}$ 中. □

另：设 $V=V_1\sqcup\cdots\sqcup V_n$ 且 n 极小.

$\exists x\in V_1$ 且 $x\notin V_2\sqcup\cdots\sqcup V_n$. $\exists y\in V_2$ 且 $y\notin V_1\sqcup V_3\sqcup\cdots\sqcup V_n$.

那么 $x+y\notin V_1\sqcup V_2$.

考虑 $x+2y$，$x+3y$，…，$x+ny\in V$. 这 $(n-1)$ 个元素.

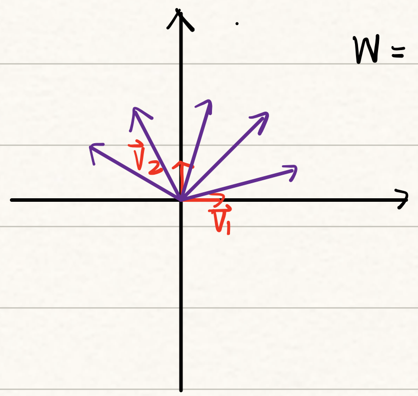
首先，它们都不在 $V_1\sqcup V_2$ 中. 即只能在 $V_3\sqcup\cdots\sqcup V_n$ 中.

必存在两个元素在同一个子空间 V_j $(j\in\{3,\cdots,n\})$ 中. 那么 $y\in V_j$ $\to\leftarrow$.

典型错误：$V=V_1\sqcup(V_2\sqcup\cdots\sqcup V_n)$ 那么 $V=V_1$ 或 $V=V_2\sqcup\cdots\sqcup V_n$.

注：一般来说，$V_1\sqcup V_2$ 不是子空间 $V_1\sqcup V_2\subseteq V_1+V_2$.

$\dim \cancel{(V_1\sqcup V_2)}$



$W = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$

W的一维真子空间： $V_{\lambda,s} = \langle \lambda\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 \rangle$.

W无法写成有限个$V_{\lambda,s}$的并.

有限域上结论不成立：

F_2 $\langle (0,1),(1,0) \rangle = \langle (0,1) \rangle \sqcup \langle (1,0) \rangle \sqcup \langle (1,1) \rangle$.

$\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

补充练习：

1 线性映射基本定理I： $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V,V)$. $V/\ker(\mathcal{A}) \cong \mathrm{Im}\mathcal{A}$.

$$\mathrm{rank}(\mathcal{A}) - \mathrm{rank}(\mathcal{A}^2) = \dim(\ker(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Im}(\mathcal{A})).$$

$W = \mathrm{Im}\mathcal{A}$. $\mathcal{A}(W) = \mathrm{Im}\mathcal{A}^2$. $\mathcal{A}|_W : W \to W$ $\dim\ker(\mathcal{A}|_W) = \dim W - \dim\mathcal{A}(W)$.

由此 设$\mathcal{A}$对应矩阵为$A \in F^{n\times n}$.

$$\mathrm{rank}(A) - \mathrm{rank}(A^2) \geq \mathrm{rank}(A^2) - \mathrm{rank}(A^3).$$

2. 空间的维数不等式.

$\mathscr{A} \in Hom(U, V)$, W 是 U 的子空间

$$\dim \mathscr{A}(W) \geq \dim W - \dim U + \operatorname{rank} \mathscr{A}.$$

$- (\dim U - \operatorname{rank} \mathscr{A})$

$- \ker(\mathscr{A}).$