2025年春季学期第三周作业

1. 将数域 $\mathbb{C}$ 上的无穷数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 全体组成的集合看作 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 W. 定义 W 中任意两个数列的加法 $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$ 及数乘 $\lambda\{a_n\}=\{\lambda a_n\}$, $\lambda\in\mathbb{C}$. 如下集合 V 是否组成 W 的一个子空间? 如果是, 求出它的维数及一组基.

   (1) W 中所有等比数列组成的集合.

   (2) W 中所有等差数列组成的集合.

2. 设 W_1 和 W_2 分别是 $\mathbb{Q}$ 上线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

   的解空间. 求 $W_1\cap W_2$ 的一组基, 并由此分别扩充为 W_1 和 W_2 的一组基.

3. 设 $d\in\mathbb{Z}^+$ 和 $\mathbb{R}[x]^{(d)}=\{f\in\mathbb{R}[x]\mid \deg(f)<d\}$. 定义映射

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathbb{R}[x]^{(d)} &\longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(d)} \\ f &\longmapsto x\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)-f(x). \end{aligned}$$

   证明 ϕ 是线性映射, 并分别求其核空间和像空间的一组基.

4. 设 $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{C}$ 两两不相等, $y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{C}$. 求证: 存在唯一一个次数低于 n 的多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}\in\mathbb{C}[x]$ 使得 $f(x_i)=y_i$ 对 $1\leq i\leq n$ 成立. 并简述如何求解 $f(x)$.

5. 设 V 是域 F 上的线性空间.

   (1) 设 V_1,V_2 是 V 的子空间. 证明: $V=V_1\cup V_2$ 蕴含 $V=V_1$ 或 $V=V_2$. (*提示: 参见上学期第十二次作业第 5 题或期末考试 A 卷第 6 题*).

   (2) (选做) 设 F 的特征等于零. 证明: V 不可能是有限个真子空间的并. (*谨此告别无穷维线性空间*).

1. 将数域 $\mathbb{C}$ 上的无穷数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ 全体组成的集合看作 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 W. 定义 W 中任意两个数列的加法 $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$ 及数乘 $\lambda\{a_n\}=\{\lambda a_n\}$, $\lambda\in\mathbb{C}$. 如下集合 V 是否组成 W 的一个子空间? 如果是, 求出它的维数及一组基.

(1) W 中所有等比数列组成的集合.

(2) W 中所有等差数列组成的集合.

证：(1)

设 W 中所有等比数列组成的集合为 V,

则 $\forall a_n, b_n \in V$, 设 $a_n = a_1 q_1^{n-1}$ $\quad b_n = b_1 q_2^{n-1}$

$$\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{a_n+b_n} = \frac{a_1 q_1^n + b_1 q_2^n}{a_1 q_1^{n-1} + b_1 q_2^{n-1}}$$

只有当 $q_1 = q_2$ 时, 此比值才是常数.

若 $q_1 \neq q_2$ 则 $\{a_n+b_n\}_{n\geq 1}$ 不是等比数列.

法二: 直接举反例 $a_n = 2^n$ $\quad b_n = 3^n$ $\quad a_n+b_n$ 不是等比数列.

(2) 设 W 中所有等差数列构成的集合为 V

$\forall a_n, b_n \in V$, 设 $a_n = a_1 + (n-1)d$ $\quad b_n = b_1 + (n-1)e$

$a_n + b_n = (a_1 + b_1) + (n-1)(d+e)$

则 a_n+b_n 是首项为 a_1+b_1, 公差为 $d+e$ 的等差数列.

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\quad \lambda \cdot a_n = \lambda a_1 + (n-1)d\lambda$

则 λa_n 是首项为 λa_1, 公差为 $(n-1)\lambda$ 的等差数列.

所以 V 是 W 的子空间.

因为任意的等差数列 $a_n = a_1 + (n-1)d = (a_1 - d) + dn = (a_1-d)\cdot 1 + d\cdot n$

所以此线性空间的基为常数序列 $\{1\}_{n\geq 1}$ 和序列 $\{n\}_{n\geq 1}$

$\dim(V) = 2$ $\quad$ (或 $\{1\}_{n\geq 1}$ 和 $\{n-1\}_{n\geq 1}$)

注：有些同学交论点，在 $\mathbb{C}$ 上

$\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间是2维的，基底为 $\{1, i\}$

但 $\mathbb{C}$ 作为 $\mathbb{C}$ 上的线性空间是一维的，基底为 $\{1\}$.

所以今后 $\{a_n\}_{n\geq 1}$，对 $\forall n$，$a_n \in \mathbb{C}$ 不用写成 $c_n + d_n \cdot i$ $\quad c_n, d_n \in \mathbb{R}$

直接写作 a_n 即可.

$\square$

2\. 2. 设 W_1 和 W_2 分别是 $\mathbb{Q}$ 上线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

的解空间. 求 $W_1 \cap W_2$ 的一组基, 并由此分别扩充为 W_1 和 W_2 的一组基.

基扩充定理：设 V 是有限维线性空间. 如果 $\boxed{S \subset V \text{ 是线性无关集}}$，则存在 V 的基底 T，使得 $\boxed{S \subset T}$.

由此扩充为 W_1, W_2 的一组基 $\Rightarrow$ 一组包括 $W_1 \cap W_2$ 的基的 W_1 和 W_2 的一组基.

解：$\forall\, \vec{x} \in W_1 \cap W_2$ 即 $\vec{x} \in W_1$ 且 $\vec{x} \in W_2$，则 $\vec{x}$ 即是 $\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$ 的解，

又是 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$ 的解. 所以 $\vec{x}$ 满足方程组.

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

下面解此方程组：

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&1\\1&2&4&2\\0&1&4&3\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&1\\0&2&5&3\\0&1&4&3\end{pmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$rank(A)=3 \Rightarrow dim(sol(A\vec{x}=\vec{0}))=1$　令 $x_4=1$ 则 $x_3=-1,\ x_2=1,\ x_1=0$

所以 $W_1\cap W_2$ 的一组基为 $\{(0,1,-1,1)\}$.

由此扩充为 W_1 与 W_2 的一组基，就是要找含 $(0,1,-1,1)$ 的 W_1 的基和 W_2 的基.

W_1：设 $B=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&2&1\end{pmatrix}$　$rank(B)=2 \Rightarrow dim(sol(B\vec{x}=\vec{0}))=2$

所以只需找到一个与 $(0,1,-1,1)$ 线性无关的 $B\vec{x}=\vec{0}$ 解即可.

如：令 $x_3=1$ $x_4=0$ 则 $\begin{cases}x_1-1=0\\x_2+2=0\end{cases} \Rightarrow$ 有一个解 $(1,-2,1,0)$

$(0,1,-1,1)$ 与 $(1,-2,1,0)$ 线性无关，所以可以做为 W_1 的一组基.

同理：W_2：设 $C=\begin{pmatrix}1&2&4&2\\0&1&4&3\end{pmatrix}$　$rank(C)=2 \Rightarrow dim(sol(C\vec{x}=\vec{0}))=2$

所以只需找到一个与 $(0,1,-1,1)$ 线性无关的 $C\vec{x}=\vec{0}$ 的解即可

令 $x_3=1$ $x_4=0$ 则 $\begin{cases}x_1+2x_2+4=0\\x_2+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=4\\x_2=-4\end{cases} \Rightarrow$ 有一个解 $(4,-4,1,0)$

$(0,1,-1,1)$ 与 $(4,-4,1,0)$ 线性无关，所以 $\{(0,1,-1,1),\ (4,-4,1,0)\}$ 是 W_2 的一组基.

$\square$

7.

3. 设 $d \in \mathbb{Z}^+$ 和 $\mathbb{R}[x]^{(d)} = \{f \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(f) < d\}$. 定义映射

$$\begin{aligned}\phi\colon \mathbb{R}[x]^{(d)} &\longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(d)}\\ f &\longmapsto x\frac{d}{dx}\big(f(x)\big) - f(x).\end{aligned}$$

证明 ϕ 是线性映射, 并分别求其核空间和像空间的一组基.

证明: $\forall f, g \in \mathbb{R}[x]^{(d)}$, $\phi(f+g) = x\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) - (f(x)+g(x))$

$= x\frac{d}{dx}f(x) - f(x) + x\frac{d}{dx}g(x) - g(x)$

$= \phi(f) + \phi(g)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \phi(\lambda \cdot f) = x\frac{d}{dx}(\lambda f(x)) - \lambda f(x)$

$= \lambda x \frac{d}{dx} f(x) - \lambda f(x)$

$= \lambda \cdot (x\frac{d}{dx}f(x) - f(x))$

$= \lambda \cdot \phi(f)$

$\ker(\phi) = \{f \in \mathbb{R}[x]^{(d)} \mid \phi(f) = 0\}$

$d=1$ 时, $\mathbb{R}[x]^{(1)} = \{f \in \mathbb{R}\}$ $\quad \phi(f) = x \cdot 0 - f = -f$

$\Rightarrow \ker(\phi) = \{0\}$.

$d \geq 2$ 时.

$\forall f \in \ker(\phi)$ $\quad \phi(f) = x\frac{d}{dx}f(x) - f(x) = 0$

$\Rightarrow \quad x\frac{d}{dx}f(x) = f(x)$

$\xrightarrow[\text{就两边求导}]{\text{没有思路时}}$ $\quad \frac{d}{dx}f(x) + x \cdot \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{df(x)}{dx}$

$\Rightarrow x \cdot \frac{d^2f}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} = 0 \Rightarrow \deg f \leq 1$

注意! $xf' = f$

$\Rightarrow \frac{xf'-f}{x^2} = 0 \Rightarrow (\frac{f}{x})' = 0$

$\Rightarrow \frac{f}{x} \in \mathbb{R}$ 设 $\frac{f}{x} = c \Rightarrow f = cx$

ker

设 $f(x) = ax+b$, $a, b \in \mathbb{R}$ 则 $x \cdot (ax+b)' - (ax+b) = 0$

$\Rightarrow \quad ax - ax - b = 0 \Rightarrow b = 0$

所以 $f(x) = ax \quad \Rightarrow \ker(\phi) = \langle x \rangle_{\mathbb{R}}$ 基为 $\{x\}$

命题：设 $\phi: V \longrightarrow W$ 线性映射，$\{e_1, \cdots e_n\}$ 为 V 的一组基，则 $\{\phi(e_1), \cdots \phi(e_n)\}$ 为 $\mathrm{im}\phi$ 的一组生成元，且 $\{\phi(e_1), \cdots \phi(e_n)\}$ 的一个极大线性无关集为 $\mathrm{im}\phi$ 的一组基

Pf: $\forall y \in \mathrm{im}\phi$，则 $\exists x \in V$, s.t. $y = \phi(x)$.

因为 $\{e_1, \cdots e_n\}$ 为 V 的一组基，所以对 $x \in V$，存在 $a_1, \cdots, a_n$ 使得

$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. 则 $y = \phi(x) = \phi(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \phi(e_i)$$

也就是说 $\forall y \in \mathrm{im}\phi$ 都可以写成 $\{\phi(e_i)\}_{i=1}^{n}$ 的线性组合，即 $\{\phi(e_1), \cdots, \phi(e_n)\}$ 为 $\mathrm{im}\phi$ 的生成元.

显然 $\{\phi(e_1) \cdots \phi(e_n)\}$ 的极大线性无关集是 $\mathrm{im}(\phi)$ 的极大线性无关集.

$\Longrightarrow$ 是一组基 $\square$

这里求 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基：

$\mathbb{R}[x]^{(d)}$ 中一组基为 $\{1, x, x^2, \cdots x^{d-1}\}$

$\phi(1) = 1 \cdot 0 - 1 = -1$ $\quad \phi(x) = x \cdot 1 - x = 0$ $\quad \phi(x^2) = x \cdot 2x - x^2 = x^2$

$\cdots$ $\quad \phi(x^{d-1}) = x \cdot (d-1)x^{d-2} - x^{d-1} = (d-2)x^{d-1}$

所以 $\{-1, 0, x^2, \cdots x^{d-1}\}$ 是一组生成元，

$\{-1, x^2, \cdots x^{d-1}\}$ 是它的极大线性无关集.

$\Longrightarrow \mathrm{im}(\phi)$ 的一组基是 $\{-1, x^2, \cdots x^{d-1}\}$ $\quad \dim(\mathrm{im}(\phi)) = d-1$

$\square$

或 设 $f \in \mathbb{R}[x]^{(d)}$，$f = f_{d-1}x^{d-1} + \cdots + f_1 x + f_0$

$x \cdot f' - f = x \cdot ((d-1)f_{d-1}x^{d-2} + \cdots + f_1) - (f_{d-1}x^{d-1} + \cdots + f_1 x + f_0)$

$= (d-2)f_{d-1}x^{d-2} + \cdots - f_0$

所以 $im(\phi)$ 的一组基是 $\{1, x^2, x^3, \cdots x^{d-1}\}$ $\square$

上学期证对偶定理时李老师用到的断言：（第七周讲义定理5.14）

命题 $\phi: V \longrightarrow W$ 线性映射，设 $v_1, \cdots v_d$ 是 $ker(\phi)$ 的一组基，

由基扩充定理，$\mathbb{R}^n$ 有一组基 $v_1, \cdots, v_d$，$v_{d+1}, \cdots, v_n$.

断言 $\phi(v_{d+1}), \cdots \phi(v_n)$ 是 $im(\phi)$ 的一组基.

此题中：$\{x\}$ 是 $ker(\phi)$ 的一组基，由 $\{x\}$ 扩充得到的 $\mathbb{R}[x]^{(d)}$ 中的一组基为

$\{1, x, x^2, \cdots x^{d-1}\}$，由上述命题 $\{\phi(1), \phi(x^2), \cdots \phi(x^{d-1})\}$ 是 $im(\phi)$ 的一组基

$= \{-1, x^2, \cdots x^{d-1}\}$

证明命题：引入引理：设 $\phi: V \to W$ 是线性映射，$v_1, \cdots v_k \in V$ 线性无关，则

$\phi(v_1), \cdots \phi(v_k)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $ker(\phi) \cap \langle v_1, \cdots, v_k \rangle = \{0\}$.

pf：($\Leftarrow$) 设 $\exists a_1, \cdots, a_k$ s.t. $a_1\phi(v_1) + \cdots + a_k\phi(v_k) = 0 \Rightarrow \phi(a_1v_1 + \cdots + a_kv_k) = 0$

$\Rightarrow a_1v_1 + \cdots + a_kv_k \in ker\phi \cap \langle v_1, \cdots, v_k \rangle \Rightarrow a_1v_1 + \cdots + a_kv_k = 0$，又因为

$v_1, \cdots, v_k$ 线性无关 $\Rightarrow a_1 = \cdots = a_k = 0 \Rightarrow \phi(v_1), \cdots, \phi(v_k)$ 线性无关.

($\Rightarrow$)：$\forall x \in ker(\phi) \cap \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ 则 $\phi(x) = 0$ 且 $x = b_1v_1 + \cdots + b_kv_k$

$\Rightarrow \phi(b_1v_1 + \cdots + b_kv_k) = 0 \Rightarrow b_1\phi(v_1) + \cdots + b_k\phi(v_k) = 0$，因为 $\phi(v_1), \cdots \phi(v_k)$

线性无关 $\Rightarrow b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0 \Rightarrow x = 0$

由引理，要证 $\phi(v_{d+1}) \cdots \phi(v_n)$ 是 $im(\phi)$ 的一组基：①先证 $\phi(v_{d+1}), \cdots \phi(v_n)$ 线性无关，

②证 $im(\phi) = \langle \phi(v_{d+1}), \cdots \phi(v_n) \rangle$

①：由引理证 $ker(\phi) \cap \langle v_{d+1}, \cdots v_n \rangle = \{0\}$

$\forall x \in ker(\phi) \cap \langle v_{d+1}, \cdots v_n \rangle$，则存在 $a_1, \cdots, a_d, b_{d+1}, \cdots b_n \in \mathbb{F}$ s.t.

$x = a_1v_1 + \cdots + a_dv_d = b_{d+1}v_{d+1} + \cdots + b_nv_n$

$\Rightarrow a_1v_1+\cdots+a_dv_d-b_{d+1}v_{d+1}-\cdots-b_nv_n=0$

因为 $\{v_1,\dots,v_d,v_{d+1},\dots,v_n\}$ 线性无关, 所以 $a_1=\cdots=a_d=0 \Rightarrow x=0$.

再证 $\mathrm{im}(\phi)=\langle\phi(v_1),\dots,\phi(v_d)\rangle$. 因为 $v_1,\dots,v_n$ 是 V 的一组基, 所以 $\mathrm{im}(\phi)=\langle\phi(v_1),\dots,\phi(v_n)\rangle$ 因为 $\phi(v_1)=\cdots=\phi(v_d)=0$, 所以

$\mathrm{im}(\phi)=\langle\phi(v_{d+1}),\dots,\phi(v_n)\rangle$.

$\square$

4.

4. 设 $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ 两两不相等, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. 求证: 存在唯一一个次数低于 n 的多项式 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \in \mathbb{C}[x]$ 使得 $f(x_i) = y_i$ 对 $1 \le i \le n$ 成立. 并简述如何求解 $f(x)$.

证: $f(x_i)=y_i \Rightarrow$ 有方程组

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (☆)$$

则 $|A| = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0$ A可逆 $\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

或由 Cramer 可求出 $a_0, \ldots, a_{n-1}$. 存在性

唯一性: 若存在不同的 $f(x), g(x)$ 都满足要求, 则 $f(x_i) - g(x_i) = y_i - y_i = 0$

i.e. $f(x)-g(x)$ 有 n 个不同根; 但 $\deg(f-g) < n \longrightarrow \longleftarrow$

如何求解: ① 求解线性方程组 (☆)

② Lagrange 插值: 构造如下基多项式:

$$l_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} \qquad l_i(x_j) = 0 \quad i \neq j$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} \qquad l_i(x_i) = 1 \quad i = j$$

$$\vdots$$

$$l_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

令 $f(x)=y_1l_1(x)+y_2l_2(x)+\cdots+y_nl_n(x)$

则 $f(x)$ 满足题目要求.

$l_i(x)$ 的上述性质也可描述成:

$$l_i(x)\equiv 1 \mod (x-x_i)$$

$$l_j(x)\equiv 0 \mod (x-x_i) \quad j\neq i$$

则上述结论可以叙述为:

<u>命题</u> 给定一组两两互素的一次多项式 $x-x_i$, $i=1,\cdots,n$ 则对于 n 个常数 $y_1,\cdots,y_n\in\mathbb{R}$, 存在多项式 $f(x)\in\mathbb{R}[x]$, 使得

$$f(x)\equiv y_i \mod (x-x_i), \quad i=1,2,\cdots n$$

(中国剩余定理). $\square$

5. 设 V 是域 F 上的线性空间.

(1) 设 V_1, V_2 是 V 的子空间. 证明: $V=V_1\cup V_2$ 蕴含 $V=V_1$ 或 $V=V_2$.
(提示: 参见上学期第十二次作业第 5 题或期末考试 A 卷第 6 题).

(2) (选做) 设 F 的特征等于零. 证明: V 不可能是有限个真子空间的并.
(谨此告别无穷维线性空间).

证明(1): (反证法) 设 $V\neq V_1$ 且 $V\neq V_2$ 则有 $V_1\not\subseteq V_2$ 且 $V_2\not\subseteq V_1$

否则若 $V_1\subseteq V_2\Rightarrow V=V_1\cup V_2=V_2$ $\rightarrow\leftarrow$ $V_2\not\subseteq V_1$ 同理可证.

取 $x\in V_1$ 且 $x\notin V_2$ $\quad y\in V_2$ 且 $y\notin V_1$

则 $x+y\in V$, 因为 $V=V_1\cup V_2\Rightarrow x+y\in V_1$ 或 $x+y\in V_2$

若 $x+y\in V_1$, 已知 $x\in V_1\Rightarrow y=x+y-x\in V_1$ $\rightarrow\leftarrow$

若 $x+y\in V_2$, 已知 $y\in V_2\Rightarrow x=x+y-y\in V_2$ $\rightarrow\leftarrow$

所以 $V=V_1$ 或 $V=V_2$.

(2). 反证法：设 $V=\bigcup_{i=1}^{n} V_i$，V_i 均为 V 的真子空间.

并且设 n 是满足条件的最小正整数，i.e. 最少可以写成n个真子空间的并.

因为 $V_1 \subsetneq V$，所以存在 $x\in V \setminus V_1$，对 $\forall\, y\in V_1$

则对 $\forall\, \lambda\in F$ 有 $y+\lambda x\in V$ 且 $y+\lambda x\notin V_1$

则 $y+\lambda x\in \bigcup_{i=2}^{n} V_i$ 因为F是特征为0的域，元素个数有无穷多个.

设 $y+\lambda_1 x\in \bigcup_{i=2}^{n} V_i$，- - - $y+\lambda_{n+1} x\in \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ - - - -

则至少有两个元素 $y+\lambda_i x$ 和 $y+\lambda_j x$ 同属于某一个空间 V_k $2\le k\le n$

$\Rightarrow$ $y+\lambda_i x-(y+\lambda_j x)=(\lambda_i-\lambda_j)x\in V_k \Rightarrow x\in V_k$

$y+\lambda_i x-\frac{\lambda_i}{\lambda_j}(y+\lambda_j x)=(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_j})y\in V_k \Rightarrow y\in V_k$

$\Rightarrow V_1\subseteq V_k$ 则 $V=\bigcup_{i=1}^{n} V_i=\underbrace{\bigcup_{i=2}^{n} V_i}_{n-1\text{个子空间的并}}$ $\longrightarrow\longleftarrow$

$\square$