第八次习题课.

定理 5.14 *(线性映射基本定理)* 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，$\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的任意给定的向量. 则存在唯一的线性映射 ϕ 使得 $\phi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

矩阵 $A \longrightarrow$ 线性映射. ϕ_A

命题 5.17 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 线性映射 $\phi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是满足

$$\phi_A(\mathbf{e}_j) = \vec{A}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

则对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_A(\mathbf{x}) = x_1\vec{A}^{(1)} + \cdots + x_n\vec{A}^{(n)}.$$

进而, $V_c(A) = \mathrm{im}(\phi_A)$ 和 $V_A = \ker(\phi_A)$, 其中 V_A 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程程组的解空间.

对偶定理: $\dim(\mathrm{sol}(AX=0)) + \dim(V_c(A)) = n$

$\dim(\ker(\phi_A)) + \dim(\mathrm{im}(\phi_A)) = n$.

线性映射 $\longrightarrow$ 齐次线性方程组 $\longrightarrow$ 矩阵.

命题 5.18 设线性映射 $\phi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. 则存在唯一的 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 满足 $\phi = \phi_A$, 其中 ϕ_A 是 A 在标准基下的诱导的线性映射. 进而, $\mathrm{im}(\phi) = V_c(A)$ 和 $\ker(\phi) = V_A$, 其中 V_A 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程程组的解空间.

- $A \longleftrightarrow \phi_A$

① $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = \mathrm{rank}(A)$ ϕ 满射 $\Longleftrightarrow$ A 行满秩.

② $\dim(\ker(\phi)) = n - \mathrm{rank}(A)$ ϕ 单射 $\Longleftrightarrow$ A 列满秩.

③ ϕ 是双射 $\Longleftrightarrow$ $m=n$ 且 A 满秩.

1. 设 $\mathbb{R}^4$ 中的标准基为 $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. 线性映射 $\phi: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ 由如下关系给出：

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{e}_1) = 3\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_4 \\ \phi(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 - 6\mathbf{e}_3 + 4\mathbf{e}_4 \\ \phi(\mathbf{e}_4) = 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 \end{cases}$$

(1) 求 ϕ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ 下的矩阵，并分别求 $\ker(\phi)$, $\operatorname{im}(\phi)$ 的维数和一组基;

(2) 求 $\phi \circ \phi$ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ 下的矩阵.

(1) 由题意可知

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2+5r_1 \\ r_3-3r_1}]{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 7 & -30 & 17 \\ 0 & -2 & 17 & -9 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-\frac{3}{7}r_2]{r_3+\frac{2}{7}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 7 & -30 & 17 \\ 0 & 0 & \frac{59}{7} & -\frac{29}{7} \\ 0 & 0 & \frac{118}{7} & -\frac{58}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 7 & -30 & 17 \\ 0 & 0 & \frac{59}{7} & -\frac{29}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\dim(\operatorname{im}(\phi)) = \operatorname{rank}(A_\phi) = 3$

$\dim(\ker(\phi)) = n - \operatorname{rank}(A_\phi) = 4 - 3 = 1$

$\operatorname{im}(\phi)$ 的一组基可取 A_ϕ 中任意 3 个线性无关的列向量.

如 $\{\overrightarrow{A_\phi^{(1)}}, \overrightarrow{A_\phi^{(2)}}, \overrightarrow{A_\phi^{(3)}}\}$ 是 $\operatorname{im}(\phi)$ 的一组基.

$\ker(\phi)$ 对应的齐次线性方程组

等价于 $\begin{cases} x_1 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \\ 7x_2 - 30x_3 + 17x_4 = 0 \\ 59x_3 - 29x_4 = 0 \end{cases}$ 设 $x_4 = 59$ 则 $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -19 \\ 29 \\ 59 \end{pmatrix}$ 是一个解.

即 $\{\vec{v}\}$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基

(2) $A_{\phi\circ\phi} = A_\phi \cdot A_\phi = \begin{pmatrix} 18 & -20 & 3 & -7 \\ -50 & 65 & 13 & 12 \\ -3 & 7 & 47 & -21 \\ -11 & 18 & -28 & 19 \end{pmatrix}$

2. 设 $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ 由 $\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. 给出. 计算 ϕ 在标准基下的矩阵和 $\ker(\phi)$ 的一组基.

2. $\phi(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 设 $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基

$\Rightarrow \phi(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\phi(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\phi(\vec{e_3}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\ker\phi$ 对应齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ 取 $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ 为 $\ker(\phi)$ 一组基.

3 计算下述情况时的 AB, BA 以及 $\operatorname{rank}(AB)$ 和 $\operatorname{rank}(BA)$:

(1)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) $AB = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = BA$

用二阶行列式判断解确定

$\Updownarrow$

矩阵满秩.

$\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(BA) = 2$

(2) $AB = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{7}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{5}{2} & 3 \\ -4 & -4 & 4 \\ -5 & -\frac{11}{2} & 5 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(BA) = 2$

4. 设整数 $m \geq 1$. 证明:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & ma & \frac{m(m-1)}{2}ab + mc \\ 0 & 1 & mb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

证：用数学归纳法

① $m=1$ 时 等式成立.

② 设 $m=k \geqslant 2$ 时，等式成立

即 $$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ab+kc \\ 0 & 1 & kb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则 $m=k+1$ 时

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & ka & \frac{k(k-1)}{2}ab+kc \\ 0 & 1 & kb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a+ka & c+kab+\frac{k(k-1)}{2}ab+kc \\ 0 & 1 & b+kb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & (k+1)a & \frac{k(k+1)}{2}ab+(k+1)c \\ 0 & 1 & (k+1)b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由数学归纳法等式得证.

5. 设 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是线性映射，并且满足对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\phi(\mathbf{x}) \in \langle \mathbf{x} \rangle$. 证明：存在 $\lambda \in \mathbb{R}$ 使得对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\phi(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

证: 设 $\phi(\vec{e_i}) = \lambda_i \vec{e_i}$ $\quad i=1,2,\cdots,n$

由 ϕ 线性映射 $\Rightarrow \phi(\vec{e_1}+\cdots+\vec{e_n}) = \phi(\vec{e_1})+\cdots+\phi(\vec{e_n})$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e_i}$$

取 $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\vec{e_1}+\cdots+\vec{e_n}$ $\quad \phi(\vec{x})=\lambda\vec{x}$

$\Rightarrow \lambda_1\vec{e_1}+\cdots+\lambda_n\vec{e_n}=\lambda(\vec{e_1}+\cdots+\vec{e_n}) \Rightarrow \lambda=\lambda_1=\cdots=\lambda_n$

$\forall \vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n}\in\mathbb{R}^n \quad \exists\ \lambda=\lambda_1=\cdots=\lambda_n$

$$\phi(\vec{x})=\phi\left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e_i}\right)=\sum_{i=1}^n x_i\phi(\vec{e_i})=\sum_{i=1}^n x_i\lambda_i\vec{e_i}$$
$$=\lambda\sum_{i=1}^n x_i\vec{e_i}$$
$$=\lambda\vec{x}$$

6. 设 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性映射，证明：

(1) $\ker(\phi)\subseteq\ker(\phi^2)\subseteq\cdots\subseteq\ker(\phi^m)\subseteq\cdots$; 和
$\operatorname{im}(\phi)\supseteq\operatorname{im}(\phi^2)\supseteq\cdots\supseteq\operatorname{im}(\phi^m)\supseteq\cdots$;

(2) 存在正整数 k 使得这两个子空间序列同时稳定，即
$\ker(\phi^k)=\ker(\phi^{k+1})=\ker(\phi^{k+2})=\cdots$; 和
$\operatorname{im}(\phi^k)=\operatorname{im}(\phi^{k+1})=\operatorname{im}(\phi^{k+2})=\cdots$.

6. 证: (1) 只需证 $\ker(\phi^i)\subseteq\ker(\phi^{i+1})\quad\forall i\geq 1$

设 $\forall\vec{v}\in\ker(\phi^i)$, $\Rightarrow \phi^i(\vec{v})=\vec{0}$

则 $\phi^{i+1}(\vec{v})=\phi\circ\phi^i(\vec{v})=\phi(\vec{0})=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v}\in\ker(\phi^{i+1})$ $\quad$ 即 $\ker(\phi^i)\subseteq\ker(\phi^{i+1})$

再证 $\operatorname{im}(\phi^i)\supseteq\operatorname{im}(\phi^{i+1})$

$\forall\vec{u}\in\operatorname{im}(\phi^{i+1})\Rightarrow\exists\ \vec{v}\in\mathbb{R}^n\quad\phi^{i+1}(\vec{v})=\vec{u}$

即 $\phi^i(\phi(\vec{v}))=\vec{u}\quad\Rightarrow\vec{u}\in\operatorname{im}(\phi^i)$

即 $\operatorname{im}(\phi^{i+1})\subseteq\operatorname{im}(\phi^i)$

(2) 分析: $\ker(\phi^i)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 $\quad\dim(\ker(\phi^i))\leq n$

$\operatorname{im}(\phi^i)\supset\{\vec{0}\}\quad\Rightarrow\dim(\operatorname{im}(\phi^i))\geq 0$.

维数相等的两个子空间若有包含关系，则它们必相同.

期中复习.

- 单射：① $\forall\ x_1 \neq x_2 \in S \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

  ② $\forall\ f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

  ③ $\forall\ y \in T,\ |f^{-1}(\{y\})| \leq 1$.

- 满射：① $\forall\ y \in T$，$\exists\ x \in S$，s.t. $y=f(x)$

  ② 对 $\forall\ y \in T$，$f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

- 双射：① f 既是单射又是满射. ② $\forall\ y \in T,\ |f^{-1}(\{y\})|=1$

  $f: S \longrightarrow T$.

- 像集：$im(f)=\{f(x) \mid x \in S\}$

- 原像集：$f^{-1}(T')=\{x \in S \mid f(x) \in T'\}$ $T' \subset T$

- 等价关系：① 自反性 ② 对称性 ③ 传递性.

- 偏序关系 ① 自反性 ② 反对称性 ③ 传递性.

- 置换：循环分解：$\sigma=\tau_1\tau_2\cdots\tau_l$

  阶：$ord(\sigma)=k$：$\sigma^k=e$ or 循环分解中每个圈的长度之积.

  符号：σ 的奇偶性与 $\sum_{i=1}^{l}(ord(\tau_i)-1)$ 的相同

  逆序数：$inv(\pi)=|\{(i,j) \mid i<j \text{ 且 } \pi(i)>\pi(j)\}|$

- 辗转相除法. 讲义 例 7.5 例 7.6.

  $$lcm(m,n)=\frac{m \cdot n}{gcd(m,n)}$$

- 极大线性无关组：

  设 $S \subset \mathbb{R}^n$. 有限非空子集 $T \subset S$ 称为 S 的一个极大线性无关组，

  如果：(1) T 中的向量线性无关.

  (2) $\forall\ v \in S$，$v \in \langle T \rangle$

Property: $\{u_1, \cdots, u_d\}$ 是子空间 U 的一组基 $\Leftrightarrow$ $\{u_1, \cdots, u_d\}$ 是 U 的极大线性无关组.

- 维数: $\dim(U) =$ 基底元素个数.

Property:
- $U \subset W \Rightarrow \dim(U) \leq \dim(W)$.

进而 $U = W \Leftrightarrow \dim(U) = \dim(W)$. (即在 $U \subset W$ 的前提下)

- $\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W)$.
- $\dim(\{0\}) = 0$

Recall 直和: U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间, $U \cap V = \{0\}$ 则 $U+V$ 是直和.

维数公式: $\dim(U) + \dim(V) = \dim(U+V) + \dim(U \cap V)$.