第七次习题课

- 秩：

  行秩：矩阵行向量构成子空间的维数． $\dim(V_r(A))$

  列秩：矩阵列向量构成子空间的维数． $\dim(V_c(A))$

- 初等行变换保持行秩（也保持列秩）初等列变换保持列秩．

  矩阵的秩： $\mathrm{rank}(A) =$ A的行秩 $=$ A的列秩．

  $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 行满秩： $\mathrm{rank}(A)=m$

  列满秩： $\mathrm{rank}(A)=n$

- 初等变换（行变换、列变换）保持矩阵的秩
- $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow \mathrm{rank}(A) \leq \min\{m,n\}$
- $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \times \mathbb{R}^{m\times k} \Rightarrow \mathrm{rank}((A,B)) \leq \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)$
- $A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow A^t \in \mathbb{R}^{n\times m},\ \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^t)$

1. 设 A 和 B 是实数域上的有相同行数的矩阵. 证明:

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B).$$

例3.12．

(E,F)．

$\mathrm{rank}((E,F)) \leq \mathrm{rank}(E)+\mathrm{rank}(F)$

证：设 $\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -7B \end{pmatrix}$

$E=\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$ $F=\begin{pmatrix} 0 \\ -7B \end{pmatrix}$ $M=(E,F)$

可知 $\mathrm{rank}(E)=\mathrm{rank}(A)$，$\mathrm{rank}(F)=\mathrm{rank}(B)$

另一方面，由 $V_c(E) \cap V_c(F) = \{\vec{0}\}$

由维数公式 $\dim(V_c(M)) = \dim(V_c(E)) + \dim(V_c(F)) - \dim(\{\vec{0}\})$

即 $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ 命题得证．

2. 证明：

(1) 矩阵加一行，则秩不变或增加 1；

(2) 矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 且 $\mathrm{rank}(A) = r$, 则 A 的任意 s 行组成一个秩不小于 $r+s-m$ 的矩阵.

证: (1) 设 $A \times \mathbb{R}^{m\times n}$ 设A的行空间 $V_r = \langle \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m \rangle \subset \mathbb{R}^n$

↳行向量.

则由定义 $\mathrm{rank}(A) = \dim(V_r)$

若矩阵增加一行，即 V_r 中增加一个行向量 $\vec{v}_{m+1}$

若 $\vec{v}_{m+1} \in V_r$ 即 $\hat{A} \in \mathbb{R}^{(m+1)\times n}$ 的行空间维数不变.

$\mathrm{rank}(\hat{A}) = \mathrm{rank}(A)$ （$\vec{v}_{m+1}$ 与 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ 线性相关）

若 $\vec{v}_{m+1} \notin V_r$ ，即 $\vec{v}_{m+1}$ 与 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m$ 线性无关

则 $\mathrm{rank}(\hat{A}) = \mathrm{rank}(A) + 1$.

(2) (一). 设 B为 A的任意s行组成的矩阵 $\Rightarrow B \in \mathbb{R}^{s\times n}$

由(1) 若由 B 增加 A中剩余的一行到 $\tilde{B}$

$\mathrm{rank}(\hat{B}) = \mathrm{rank}(B)$ or $\mathrm{rank}(B)+1$.

多次应用(1)，将B增加 $m-s$ 行到 A.

即得 $\mathrm{rank}(B) \leq \mathrm{rank}(A) \leq \mathrm{rank}(B) + m - s$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(B) \geq r+s-m$

(二). 设 $A = \begin{pmatrix} B_{s\times n} \\ C_{(m-s)\times n} \end{pmatrix}$ 其中 $B_{s\times n}$ 是取出的s行形成的矩阵.

则 $\mathrm{rank}(B) + \mathrm{rank}(C) \geq \mathrm{rank}(A) = r$.

又因为 $\mathrm{rank}(C) \leq m-s$

$\Rightarrow \mathrm{rank}(B) \geq r-(m-s) = r-m+s$ 即命题成立.

(三). 设 $A \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}} \begin{pmatrix} E_{r\times n} \\ O_{(m-r)\times n} \end{pmatrix}$

设 B 为从 A 中取出的 s 行形成的矩阵.

则 设 B 从 E 所对应 A 中 的 r 行 取出 t 行

设为 $\{\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_t}\}$ 其中 v_i 表示行向量.

从 O 所对应 A 中 的 (m-r) 行中取出 (s-t) 行.

设为 $\{\vec{w_1}, \cdots, \vec{w_{s-t}}\}$ 其中 w_i 表示行向量.

$\Rightarrow \quad s-t \leq m-r \qquad \Rightarrow \quad t \geq s-m+r$

① $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_t}$ 必定线性无关

(极大无关组中去掉部分元素仍然线性无关).

② $\{\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_t}\}$ 加入 $\{\vec{w_1}, \cdots, \vec{w_{s-t}}\}$ 中元素后可能线性相关

则 $rank(B) \geq t \geq s-m+r$

- 线性方程组与矩阵秩:

设 L 是 以 $B=(A;b) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ 为增广矩阵的线性方程组

L 相容 $\Leftrightarrow$ $rank(A) = rank(B)$

L 确定 $\Leftrightarrow$ $rank(A) = rank(B) = n$

L 确定. $\Leftrightarrow$ 可退化为 $rank(A) = n$

- 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ (方阵) L: $A\vec{x}=\vec{b}$ $\quad H$: $A\vec{x}=\vec{0}$

  则 L 确定 $\Longleftrightarrow$ H 确定.

- 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, H: $A\vec{x}=\vec{0}$ $\quad L$: $A\vec{x}=\vec{b}$
  - $\dim(\mathrm{sol}(H)) + \mathrm{rank}(A) = n$
  - L 相容 $\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{sol}(L)) + \mathrm{rank}(A) = n$
  - 设 $\vec{v}\in \mathrm{sol}(L)$, 则 $\mathrm{sol}(L) = \vec{v} + \mathrm{sol}(H)$

3. 计算齐次线性方程组 H: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$ 解空间的一组基.

解: 设方程组 H 系数矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}$$ 经初等行变换.

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 5 & 30 & -25 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $\mathrm{rank}(A) = 2$ 即 $\dim(\mathrm{sol}(H)) = 4-2 = 2$

由高斯消去. 原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \end{cases}$$

则 令 $x_3 = 1, x_4 = 0$ 得 $x_1 = 8$, $x_2 = -6$

令 $x_3 = 0, x_4 = 1$ 得 $x_1 = -7$ $x_2 = 5$

则 $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 sol(H) 的一组基.

4. 求出下列线性方程组 L: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$ 与参数 λ 的值对应的解流形.

解: 方程组 L 对应增广矩阵.

$$(A,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & -3 & 7 & 8 & 9 \\ \lambda & -4 & 9 & 10 & 11 \end{array}\right)$$

经过初等行变换

$$(A,b) \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1-r_3}]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ \lambda-8 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ \lambda-8 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-\frac{1}{2}r_3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ \lambda-8 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① 当 $\lambda-8=0$ 时 即 $\lambda=8$ 时 $(A,b) \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}((A,b)) = 2$ 且 L 相容.

根据对偶定理, $\dim(\operatorname{sol}(L)) = 4-2 = 2$

方程组 L 等价于 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ -x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_2 + x_4 - 2 \\ x_3 = 3 - 2x_4 \end{cases}$

取 $x_2=x_4=0$ 得 $x_1=-2$，$x_3=3$

$\Rightarrow \vec{v}=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\\0\end{pmatrix}$ 是 L 的一个特解.

L 对应的齐次线性方程组 $H \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}x_2+x_4 \\ x_3=-2x_4 \end{cases}$

取 $x_2=2$，$x_4=0$，得 $x_1=1$，$x_3=0$

取 $x_2=0$，$x_4=1$ 得 $x_1=1$，$x_3=-2$

则 $\vec{w_1}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{w_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$ 即 $\mathrm{sol}(L)=\vec{v}+\langle \vec{w_1},\vec{w_2}\rangle$

② 当 $\lambda-8\neq 0$ 即 $\lambda\neq 8$ 时

$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}((A,b))=3$ L 相容.

即 $\dim(\mathrm{sol}(L))=1$

L 等价于 $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5 \\ (\lambda-8)x_1-x_3-2x_4=-3 \\ -2x_3-4x_4=-6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=3x_3+4x_4-5 \\ x_3=3-2x_4 \end{cases}$

取 $x_4=0$ 得 $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\4\\3\\0\end{pmatrix}$ 为 L 的一个特解

以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组 H 等价于

$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=0 \\ (\lambda-8)x_1=0 \\ -2x_3-4x_4=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=3x_3+4x_4 \\ x_3=-2x_4 \end{cases}$

取 $x_4=1$ 得 $\vec{w}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow sol(L)=\vec{v}+\langle\vec{w}\rangle$

• 线性映射：

定义 5.1 设 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 是映射. 如果对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\underbrace{\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\phi(\mathbf{x})+\phi(\mathbf{y})}_{\text{保持加法}} \quad 和 \quad \underbrace{\phi(\alpha\mathbf{x})=\alpha\phi(\mathbf{x})}_{\text{保持数乘}},$$

则称 ϕ 是线性映射.

或 验证保持线性运算： $\phi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha\phi(\vec{x})+\beta\phi(\vec{y})$

定义 5.9 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性映射. 坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 $\phi^{-1}(\{\mathbf{0}_m\})$ 称为 ϕ 的核 (kernel), 记为 $\ker(\phi)$. 坐标空间 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 $\mathrm{im}(\phi)$ 称为 ϕ 的像 (image).

5. 在下述映射中，哪些是线性映射:

(1) $[x_1,x_2,\cdots,x_n]\mapsto[x_n,x_2,\cdots,x_1]$; ✓

(2) $[x_1,x_2,\cdots,x_n]\mapsto[x_1,x_2^2,\cdots,x_n^n]$; ✗

(3) $[x_1,x_2,\cdots,x_n]\mapsto[x_1,x_1+x_2,\cdots,x_1+x_2+\cdots+x_n]$. ✓

(1) $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$

$\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\longmapsto\vec{v}'=\begin{pmatrix}x_n\\\vdots\\x_1\end{pmatrix}$

$\forall\ \vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \vec{u}=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\phi(\alpha\vec{v}+\beta\vec{u})=\phi\left(\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\\vdots\\\alpha x_n+\beta y_n\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\alpha x_n+\beta y_n\\\vdots\\\alpha x_1+\beta y_1\end{pmatrix}=\alpha\phi(\vec{v})+\beta\phi(\vec{u})$$

(3) $\forall\ \vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\ \vec{u}=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$$\phi(\alpha\vec{v}+\beta\vec{u})=\phi\left(\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\\vdots\\\alpha x_n+\beta y_n\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\\alpha x_1+\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2\\\vdots\\\alpha x_1+\beta y_1+\cdots+\alpha x_n+\beta y_n\end{pmatrix}=\alpha\phi(\vec{v})+\beta\phi(\vec{u})$$

思考题:

6. 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是线性映射且满足: 对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x}-\phi(\mathbf{x})\in U.$$

(i) 证明: $\ker(\phi)\subset U$

(ii) 再设 $\ker(\phi)=U$. 证明: $\mathbb{R}^n=\ker(\phi)\oplus\operatorname{im}(\phi)$

证: (1) 由定义, $\ker(\phi)=\phi^{-1}(\{\vec{0}\})$

$\forall\ \vec{v}\in\ker(\phi)\quad \phi(\vec{v})=\vec{0}$

则 $\vec{v}=\vec{v}-\vec{0}=\vec{v}-\phi(\vec{v})\in U$ (由题目条件)

$\Rightarrow \ker(\phi)\subset U$.

(2) ① 先证 $\mathbb{R}^n=\ker(\phi)+\operatorname{im}(\phi)$

1> $\forall\ \vec{v}\in\mathbb{R}^n$ 设 $\phi(\vec{v})=\vec{b}$

由 $\ker(\phi)=U$ 及条件 $\Rightarrow \vec{v}-\phi(\vec{v})\in\ker(\phi)$

$\Rightarrow \phi(\vec{v}-\vec{b})=\vec{0}$

另一方面 $\vec{b}=\phi(\vec{v})\in\operatorname{im}(\phi)$

即 $\vec{v}=(\vec{v}-\vec{b})+\vec{b}$ $(\vec{v}-\vec{b}\in\ker(\phi),\ \vec{b}\in\operatorname{im}(\phi))$

$\Rightarrow \mathbb{R}^n\subseteq\ker(\phi)+\operatorname{im}(\phi)$

2> 由 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 线性映射

$\Rightarrow \ker(\phi)\subseteq\mathbb{R}^n$, $\operatorname{im}(\phi)\subseteq\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

则显然有 $\ker(\phi)+\operatorname{im}(\phi)\subseteq\mathbb{R}^n$

可利用维数去证

由 1> 2> 得 $\mathbb{R}^n=\ker(\phi)+\operatorname{im}(\phi)$

② 再证 $\ker(\phi)\cap\operatorname{im}(\phi)=\{\vec{0}\}$

$\forall\ \vec{v}\in\ker(\phi)$ & $\vec{v}\in\operatorname{im}(\phi)$

$\Rightarrow \phi(\vec{v})=\vec{0}$ 且 $\exists\ \vec{u}\in\mathbb{R}^n$, $\phi(\vec{u})=\vec{v}$

由 $U=\ker(\phi)$ 及条件: $\forall\ \vec{x}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{x}-\phi(\vec{x})\in U$

$\Rightarrow \vec{u}-\phi(\vec{u})\in\ker(\phi)$

$\Rightarrow \phi(\vec{u}-\phi(\vec{u}))=\vec{0}$

即 $\phi(\vec{u})-\phi(\vec{v})=\vec{0}$

代入 $\phi(\vec{v})=\vec{0}$ 和 $\phi(\vec{u})=\vec{v}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}=\vec{0}$ 即命题得证