第六次习题课

- **极大线性无关组**：

设 $S\subset\mathbb{R}^n$，有限非空子集 $T\subset S$ 称为 S 的一个极大线性无关组，

如果：(1) T 中的向量线性无关。

(2) $\forall\, v\in S$，$v\in\langle T\rangle$

Property：(1) 可扩充性：任意一组线性无关的向量都可扩充成一个极大线性无关组。

(2) 等势性：对同一个子集 $S\subset\mathbb{R}^n$，极大线性无关组的元素个数相同

* 任何含有非零向量的集合必有极大线性无关组。

- **基底**：$U\subset\mathbb{R}^n$ 是子空间，$U\neq\{0\}$。如果 $\forall\, u\in U$，$\exists$ 唯一的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_d\in\mathbb{R}$ 使得 $u=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_d u_d$，则称 $\{u_1,\cdots,u_d\}\subset U$ 为 U 的一组基。

Property：$\{u_1,\cdots,u_d\}$ 是子空间 U 的一组基 $\Leftrightarrow$ $\{u_1,\cdots,u_d\}$ 是 U 的极大线性无关组。

- **维数**：$\dim(U)=$ 基底元素个数。

Property：
- $U\subset W \Rightarrow \dim(U)\le\dim(W)$.
- $U=W \Leftrightarrow \dim(U)=\dim(W)$.
- $\dim(U+W)+\dim(U\cap W)=\dim(U)+\dim(W)$.
- $\dim(\{0\})=0$

Recall 直和：U,V 是 $\mathbb{R}^n$ 子空间，$U\cap V=\{0\}$ 则 $U+V$ 是直和。

在 $\mathbb{R}^2$ 中过原点的直线是 $\mathbb{R}^2$ 的一个子空间。

在 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的平面是 $\mathbb{R}^3$ 的一个子空间。

1. 设 V, V_1, V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 举例说明

(1) $V \cap (V_1 + V_2) = V \cap V_1 + V \cap V_2$ 一般不成立.

(2) $V + V_1$ 是直和, $V + V_2$ 也是直和, 但 $V_1 \neq V_2$.

(1). 设 $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

则 $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^2$

(L.H.S): $V \cap (V_1 + V_2) = V$

(R.H.S): $V \cap V_1 + V \cap V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{\vec{0}\}$

(2). $\mathbb{R}^3$ 中 设 $V = \{xOy \text{ 平面}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$V_1 = \{yOz \text{ 平面}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \right\}$

$V_2 = \{xOz \text{ 平面}\} = \left\{ \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \right\}$

则显然 $V \cap V_1 = \{0\}$ $V \cap V_2 = \{0\}$

2. 设向量 $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V = \{\lambda \mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, 且 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$, 则 V, W 都是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

(1) 求 W 的维数与一组基;

(1) $\because W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x+y+z=0 \right\}$

可知 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ 且 线性无关

$\forall \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in W$ $x = -y - z$. $\Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = -y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\therefore \vec{w} \in \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$ 即 $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ 是W的一组基

$\Rightarrow \dim(W) = 2.$

(2) 证明 $V \oplus W = \mathbb{R}^3$;

(2). 先证 $V+W=\mathbb{R}^3$，再证和为直和.

显然 $V+W \subseteq \mathbb{R}^3$

另一方面，要证 $\mathbb{R}^3 \subseteq V+W$

$\forall \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ 设 $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x+y+z \\ b = x-y \\ c = 2x-z \end{cases} \longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & b \\ 2 & 0 & -1 & c \end{array}\right) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & b-a \\ 0 & -2 & -3 & c-2a \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & -2 & c-b-a \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ 方程组有唯一解.

$\Rightarrow \forall \vec{u} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\exists$ 唯一分解 s.t. $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$
$\vec{v} \in V$, $\vec{w} \in W$.

$\Rightarrow \mathbb{R}^3 \subseteq V+W$. 综上，$\mathbb{R}^3 = V+W$

又由 $V \cap W = \left\{ \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\2\lambda\end{pmatrix} \middle| \lambda+\lambda+2\lambda=0 \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$ $\Rightarrow$ 和是直和 即 $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

(3) 将（1）中所得的 W 的基记为 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, 证明：$\{\mathbf{v}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基；

证: 由(2) $(\vec{v}, \vec{w_1}, \vec{w_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A.$

以 A 为系数矩阵的方程组 $AX=\vec{0}$ 无非平凡解

$\Rightarrow \vec{v}, \vec{w_1}, \vec{w_2}$ 线性无关.

且 任意 $\mathbb{R}^3$ 中向量可由 $\vec{v}, \vec{w_1}, \vec{w_2}$ 唯一线性表示.

$\Rightarrow \{\vec{v}, \vec{w_1}, \vec{w_2}\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 一组基.

(4) 设 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, 则存在唯一实数 x, y, z, 使得 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x\mathbf{v} + y\mathbf{w_1} + z\mathbf{w_2}$.

求 x.

由 (2), $\begin{cases} a = x+y+z \\ b = x-y \\ c = 2x-z \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x+z=a+b \\ 2x-z=c \end{matrix} \Rightarrow x = \dfrac{a+b+c}{4}$

3. 设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间，$\dim(V) = d$, 且 V 中有 t 个向量 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_t}$ 使得 $V = \langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_t} \rangle$.

证明：$t \geq d$, 且 $t = d$ 当且仅当 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_t}$ 线性无关.

证: 设 A 是 $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_t}\}$ 的一个极大线性无关组.

则 A 构成了 V 的一组基.

$\because \dim(V) = d \quad \therefore |A| = d$ 另一方面 $|A| \leq t$.

$\Rightarrow d \leq t$.

若 $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_t}$ 线性无关 $\Rightarrow |A| = t$ 即 $t=d$.

若 $t=d$ 则 $|A| = d = t \Rightarrow \vec{v_1}, \cdots, \vec{v_t}$ 线性无关.

4. (1) 求 $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩.

(1) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -54 & -30 & 15 & -39 \\ 0 & 18 & 10 & -5 & 13 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & 18 & 10 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rk}(A) = 2$

(2) 设 $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$. 求 $\begin{pmatrix}1 & e & e\\ 0 & a & b\\ 0 & c & d\end{pmatrix}$ 的秩

(2) ① $a=b=c=d=0$. $\Rightarrow rk(A)=1$

② a,b,c,d 至少有一个不为0 时

1) $ad-bc=0$ 时 $\Rightarrow rk(A)=2$

2) $ad-bc\neq 0$ 时 $\Rightarrow rk(A)=3$

5. 设 V_1,V_2 是 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间，证明：V_1+V_2 是直和当且仅当

$$\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2).$$

证: "$\Rightarrow$"

若 V_1+V_2 是直和，即 $V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}$

由 $\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$

$\dim(V_1\cap V_2)=0$

$\Rightarrow \dim(V_1+V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)$

"$\Leftarrow$"

由 维数公式 及 条件 可知 $\dim(V_1\cap V_2)=0$

$\Rightarrow V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}$ 即 V_1+V_2 是直和.

直接证明（类似于维数公式的证明）.

设 V_1 有基底 $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_l$ V_2 有基底 $\vec{w}_1,\cdots,\vec{w}_m$

断言: $V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}\Leftrightarrow S=\{\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_l,\vec{w}_1,\cdots,\vec{w}_m\}$ 是 V_1+V_2 一组基.

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_l,\beta_1,\cdots,\beta_m\in\mathbb{R}$ s.t.

$\alpha_1\vec{u}_1+\cdots+\alpha_l\vec{u}_l+\beta_1\vec{w}_1+\cdots+\beta_m\vec{w}_m=0$.

设 $\vec{w}=\beta_1\vec{w}_1+\cdots+\beta_m\vec{w}_m$ 则 $\vec{w}\in V_2$

另一方面 $\vec{w} = -\alpha_1\vec{u_1} - \cdots - \alpha_l\vec{u_l} \Rightarrow \vec{w} \in V_1$

$\Rightarrow \vec{w} \in V_1 \cap V_2$

则 $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$

同理可得 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_l = 0$.

$\Leftrightarrow$ S中向量线性无关

再设 $\vec{x} \in V_1 + V_2$，则存在 $\vec{y} \in V_1$，$\vec{z} \in V_2$ s.t. $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

因为 $\vec{y}$ 是 $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_l}$ 线性组合，$\vec{z}$ 是 $\vec{w_1}, \cdots, \vec{w_m}$ 线性组合.

$\Rightarrow \vec{x}$ 是S中向量的线性组合.

即 S 是 V_1+V_2 的一个极大线性无关组. $\Leftrightarrow$ S是 V_1+V_2 的一组基.

- 矩阵的秩：

  行秩：行向量生成的子空间 对应的维数

  列秩：列向量生成的子空间 对应的维数.

- 行变换 不影响行秩.　　一次初等行变换也保持列秩.

  列变换 不影响列秩.

  行秩 = 列秩 = 秩.

- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\text{rank}(A) = m \Rightarrow$ 行满秩.

  $\text{rank}(A) = n \Rightarrow$ 列满秩.

- $\text{rank}((A,B)) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

- $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$.