设 A 为 $m\times n$ 的矩阵，其中 $a_{ij}\in\mathbb{R}$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$A_{(i)}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ 第 i 行向量

$A^{(j)}=[a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}]$ 第 j 列向量.

我们要证明：

$$\underbrace{\operatorname{rank}\{A_{(1)},\cdots,A_{(m)}\}}_{\text{行秩}}=\underbrace{\operatorname{rank}\{A^{(1)},\cdots,A^{(n)}\}}_{\text{列秩}}$$

证明：令 $r=\dim(V_r(A))$, $s=\dim(V_c(A))$

我们**先**证明： $s\le r$

不妨设 $A_{(1)},\cdots,A_{(r)}$ 为 r 个线性无关行向量

令 $$\hat{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{bmatrix}\begin{array}{l} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(r)} \end{array}$$

设 $t=\dim(V_c(\hat{A}))$，取 $\hat{A}$ 的 t 个线性无关列，记为 $\hat{A}^{(1)},\cdots,\hat{A}^{(t)}$，则其余列为这 t 列的线性组合.

显然有 $t\le r$. 下面我们来证明：$A^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ 可以由 $A^{(1)},\cdots,A^{(t)}$ 线性组合得到.

首先：$\forall k\in\{1,2,\cdots,n\}$，存在 $\lambda_1\cdots\lambda_t\in\mathbb{R}$ 使得

$$\tilde{A}^{(k)}=\lambda_1\tilde{A}^{(1)}+\cdots+\lambda_t\tilde{A}^{(t)}$$

即 $a_{ik}=\lambda_1 a_{i1}+\cdots+\lambda_t a_{it}$， $1\le i\le r$ $(*)_1$

我们要证明：当 $i=r+1,\cdots,m$ 时

$$\boxed{a_{ik}=\lambda_1 a_{i1}+\cdots+\lambda_t a_{it} \qquad (*)_2}$$

因为 $A_{(1)}\cdots,A_{(r)}$ 为行向量空间的基底，所以

存在 $\mu_1\cdots,\mu_r\in\mathbb{R}$ 使得

$$a_{ij}=\mu_1 a_{1j}+\cdots+\mu_r a_{rj} \qquad \begin{matrix}1\le i\le m\\ 1\le j\le n\end{matrix} \qquad (**)$$

$\Longrightarrow$ $\forall i=r+1,\cdots,m$

$$\begin{aligned}a_{ik}&=\mu_1 a_{1k}+\cdots+\mu_r a_{rk}\\
&=\mu_1(\lambda_1 a_{11}+\cdots+\lambda_t a_{1t})\\
&\quad+\mu_2(\lambda_1 a_{21}+\cdots+\lambda_t a_{2t})\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\mu_r(\lambda_1 a_{r1}+\cdots+\lambda_t a_{rt})\\
&=\lambda_1(\mu_1 a_{11}+\mu_2 a_{21}+\cdots+\mu_r a_{r1})\\
&\quad+\lambda_2(\mu_1 a_{12}+\mu_2 a_{22}+\cdots+\mu_r a_{r2})\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\lambda_t(\mu_1 a_{1t}+\mu_2 a_{2t}+\cdots+\mu_r a_{rt})\\
&=\lambda_1 a_{i1}+\cdots+\lambda_t a_{it} \quad \boxed{\text{证}}\end{aligned}$$

③

$\Longrightarrow$ $s\le t\le r$，反过来考虑 A 得 $r\le s$，所以 $r=s$.

<u>第四页技巧的特例</u>（上课时可以另讲这个，便于学生直观理解）

$$A = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ A_{(3)} \end{array} \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

假设 $A_{(1)}, A_{(2)}$ 为行向量空间的极大无关组.

则存在 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 使得

$$A_{(3)} = \lambda_1 A_{(1)} + \lambda_2 A_{(2)} \qquad (*)$$

设 $\widetilde{A}$ 的前两列 $\widetilde{A}^{(1)}, \widetilde{A}^{(2)}$ 线性无关. 下面证明

$A^{(3)}$ 可以由 $A^{(1)}, A^{(2)}$ 两列线性组合得到.

假设 $\widetilde{A}^{(3)} = \mu_1 \widetilde{A}^{(1)} + \mu_2 \widetilde{A}^{(2)} \qquad (**)$

$$\begin{aligned} a_{33} &= \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23} \\ &= \lambda_1 (\mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{12}) \\ &\quad + \lambda_2 (\mu_1 a_{21} + \mu_2 a_{22}) \\ &= \mu_1 (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21}) \\ &\quad + \mu_2 (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22}) \\ &= \mu_1 a_{31} + \mu_2 a_{32} \end{aligned}$$

4

利用方程组来给以直观解释.

设 $A_{(1)}, A_{(2)} \cdots A_{(r)}$ 为 r 个行向量.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots & \\ a_{r1} & a_{r2} \cdots a_{rn} \end{pmatrix}$$

假如 $\tilde{A}^{(k)}$ 可由 $\tilde{A}^{(1)}, \cdots, \tilde{A}^{(t)}$ 列线性组合得到

$\Longleftrightarrow$ $\left(\tilde{A}^{(1)}, \cdots, \tilde{A}^{(t)} \middle| \tilde{A}^{(k)}\right)$ 对应的线性方程组 (*) 有解

若 $A_{(r+1)}$ 为 $A_{(1)} \cdots A_{(r)}$ 的线性组合

$\Longleftrightarrow$ 对应的第 r+1 个方程为前 r 个方程的线性组合

$\Rightarrow$ (*) 的解 为第 r+1 个方程的解.

齐次方程组的解空间维数 与 列秩的关系.
线性

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (LH)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad r = \dim(V_c(A))$$
列秩

$$Sol(A) = \{\vec{a} = (a_1 \cdots a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \vec{a} \text{ 为 (LH) 的解}\}$$

Sol(A) 是一个线性闭集

5 所以 Sol(A) 中存在一组基 $V_1 \cdots V_s \in \mathbb{R}^n$

命题: $r + s = n$

不妨设 $A^{(1)}, \ldots, A^{(r)}$ 为 r 个线性无关列向量，则 $\forall i = r+1, \ldots, n$
存在 $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{ir}$ 使得

$$A^{(i)} = \lambda_{i1} A^{(1)} + \cdots + \lambda_{ir} A^{(r)}$$

由此可知，如下 $n-r$ 行向量在 $sol(A)$ 中：

$$\left.\begin{aligned}
\vec{b}_{r+1} &= (\lambda_{r+1,1}, \cdots \lambda_{r+1\,r}, 1\ 0 \cdots 0) \\
\vec{b}_{r+2} &= (\lambda_{r+2,1}, \cdots \lambda_{r+2,r}, 0\ 1 \cdots 0) \\
&\vdots \quad \cdots \\
\vec{b}_{n} &= (\lambda_{n1}, \cdots \lambda_{n,r}, 0\ 0 \cdots 1)
\end{aligned}\right\} n-r \text{ 个}$$

并且这些行向量是线性无关的。所以 $n-r \leq s$。

$$\forall\ \vec{a} = (a_1 \cdots a_n) \in sol(A)$$

由 $sol(A)$ 是线性闭集，则

$$\vec{a} - \sum_{i=r+1}^{n} a_i \vec{b}_i = (a_1', \ldots, a_r', 0, 0 \cdots 0) \in sol(A)$$

由于 $A^{(1)}, \ldots, A^{(r)}$ 线性无关，则 $a_i' = 0 \quad i = 1, \ldots, r$

所以 $\vec{a} = \sum_{i=r+1}^{n} a_i \vec{b}_i$

$$\Rightarrow sol(A) = \langle \vec{b}_{r+1}, \ldots, \vec{b}_n \rangle$$

$$\Rightarrow s = \dim(sol(A)) = n-r.$$

$$\boxed{(LH)\text{的解} \overset{1\text{-}1\text{对应}}{\Longleftrightarrow} \text{列向量的一个线性相关}}$$