第6次习题课讲义

向量空间的维数

设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的线性闭集，即 V 关于加法与数乘运算封闭.

引理1. $\mathbb{R}^n$ 中任给 $n+1$ 个向量必然线性相关.
（齐次方程的变元个数大于方程个数时必有非零解）

若 $V\neq\{0\}$，则存在非零向量 $v_1\in V$，（非零向量 v_1 线性无关）若 $V\neq\langle v_1\rangle$，则存在 $v_2\in V$ 使得 v_2 不能由 v_1 的线性组合得到，所以 v_1, v_2 线性无关；若 $V\neq\langle v_1, v_2\rangle$ 则存在 $v_3\in V$ 使得 v_3 不能由 v_1, v_2 的线性组合得到，所以 v_1, v_2, v_3 线性无关，… 由上引理，该过程必在至多 n 步后得到

$$v_1, v_2, \dots, v_r \in V \quad \text{线性无关 且 } V=\langle v_1, v_2, \dots, v_r\rangle$$

称 $v_1, \dots, v_r$ 为 V 的一组基，r 称为 V 的维数.

命题2. 设 V 为 $\mathbb{R}$ 中的线性闭集 且 $v_1, \dots, v_r$ 为 V 的一组基，则任意 $v\in V$ 都可以唯一地写成 $v_1, \dots, v_r$ 的线性组合.

证明：由基的定义，v 必然可以写成 $v_1, \dots, v_r$ 的线性组合. 我们只需证明唯一性. 假设存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}$ 使得

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r$$

则有 $(\lambda_1-\mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_r-\mu_r)v_r = 0$

又因为 $v_1, \dots, v_r$ 是线性无关的，可得 $\lambda_1=\mu_1, \dots, \lambda_r=\mu_r$

即证唯一性.

例. $\mathbb{R}^n$ 中的向量组 $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ 张成 $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \vec{x}_1, \cdots \vec{x}_n$ 是线性无关的.

证明: "$\Rightarrow$" 若 $\mathbb{R}^n = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle$ 则有 $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ 线性无关

否则 $\mathbb{R}^n$ 的维数小于 n, 矛盾!

提交课第1节可以不讲

"$\Leftarrow$" 若 $\mathbb{R}^n \neq \langle \vec{x}_1, \cdots \vec{x}_n \rangle$, 则必存在 $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, 使得 v 不能由 $\vec{x}_1, \cdots \vec{x}_n$ 线性组合得到, 所以 $\vec{v}, \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ 为线性无关的向量组. 这与 $\mathbb{R}^n$ 中任意 $n+1$ 个向量线性相关矛盾!

所以 $\mathbb{R}^n = \langle \vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n \rangle$.

线性闭集的和, 直和, 补:

设 U, V 为 $\mathbb{R}^n$ 中线性闭集, 定义 U 与 V 的和

$$U+V = \{ u+v \mid u \in U, v \in V \}$$

命题3. $U+V = \langle U \cup V \rangle$.

证明: $\forall w \in U+V$, $\exists u \in U, v \in V$ s.t. $w = u+v$

因为 $u, v \in U \cup V$ 则 $u+v \in \langle U \cup V \rangle \Rightarrow U+V \subset \langle U \cup V \rangle$

$\forall w \in \langle U \cup V \rangle$, 存在 $\lambda_1 \cdots \lambda_s \in \mathbb{R}$, $w_1 \cdots w_s \in U \cup V$

使得 $w = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_s w_s$

将属于 U 的 $w_1 \cdots w_s$ 选出记为 $w_{i_1} \cdots w_{i_r}$, 其余的为 V 中向量

由于 U, V 都是线性闭集, 则 $\lambda_{i_1} w_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_r} w_{i_r} \in U$

$\lambda_{i_{r+1}} w_{i_{r+1}} + \cdots + \lambda_{i_s} w_{i_s} \in V$. 令 $u = \lambda_{i_1} w_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_r} w_{i_r}$

$v = \lambda_{i_{r+1}} w_{i_{r+1}} + \cdots + \lambda_{i_s} w_{i_s}$ 则有 $w = u+v \in U+V$

所以 $\langle U \cup V \rangle \subset U+V$.

定义: 如果 $U \cap V = 0$, 则称 $U+V$ 为直和, 记为 $U \oplus V$.

命题4. $V = V_1 \oplus V_2$ 则 $\forall x \in X$，可以唯一地表为 $x = x_1 + x_2$

其中 $x_1 \in V_1$，$x_2 \in V_2$

可以合在一起讲

证明：若 $x = x_1 + x_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$

则有 $x_1 - \bar{x}_1 = \bar{x}_2 - x_2 \in V_1 \cap V_2$

$$\Rightarrow x_1 - \bar{x}_1 = \bar{x}_2 - x_2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \bar{x}_1 \\ x_2 = \bar{x}_2 \end{array}.$$

命题5. $V = V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow \forall x \in V$，$x$ 可以唯一地写成 $x_1 + x_2$

其中 $x_1 \in V_1$，$x_2 \in V_2$

"$\Rightarrow$" 命题4.

"$\Leftarrow$" 只需证明 $V_1 \cap V_2 = 0$. $\forall x \in V_1 \cap V_2$. 则 $x = x + 0 = 0 + x$

由表示唯一性，得到 $x = 0$.

定义：设 V 为 $\mathbb{R}^n$ 中的线性闭集，如果 $V = U \oplus W$ 是个直和分解

则 W 叫作 U 在 V 中的一个补. 而 U 叫作 W 在 V 中的一个补

如何计算一个线性闭集 W 在 V 中的一个补.

$W \subseteq V$. 设 $w_1 \cdots w_r$ 为 W 的一组基. $W \subseteq V$.

则可以通过前面的讨论将 $w_1 \cdots w_r$ 扩展为 V 的一组基

$$\langle \underline{w_1, w_2, \cdots w_r} \ \underline{v_{r+1} \cdots v_{r+s}} \rangle = V$$

则 $U = \langle v_{r+1} \cdots v_{r+s} \rangle \subseteq V$ 为 W 的补，因为 $w_1 \cdots w_r$ $v_{r+1} \cdots v_{r+s}$ 线性无关，$U \cap W = 0$.

例. $V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ 求 V 在 $\mathbb{R}^3$ 中的补

③ $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ v_1 与 v_2 线性无关 取 $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ v_1, v_2, v_3 线性无关 $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ 则 $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$

线性代数：

设 $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ 线性闭包

(i) $U \cap V \subset U \subset U+V$ ✓

(ii) 如果 $U \subsetneq V$，则 $\dim U < \dim V$.

证明：反证法，若 $\dim U = \dim V$. 设 U 的一组基为

$u_1, u_2, \cdots, u_r$ $\quad r = \dim U$

因为 $\dim U = \dim V$，则 V 中不存在向量使得其不能表为 $u_1 \cdots u_r$ 的

线性组合，所以 $V = \langle u_1, u_2, \cdots, u_r \rangle = U$ 矛盾！

(iii) 若 $U \cap V = 0$，则 $\dim(U+V) = \dim U + \dim V$

（习题课就不讲 因为是作业题）证明. 设 $m = \dim U$ $\quad n = \dim V$

令 $u_1 \cdots u_m$ 为 U 的一组基

$v_1 \cdots v_n$ 为 V 的一组基

先证明：$u_1 \cdots u_m$ $v_1 \cdots v_n$ 线性无关

假设存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_m, \mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0$$

则有 $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = -(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n)$

左边 $\in U$，右边 $\in V$，所以

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m \in U \cap V$$

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n \in U \cap V$$

又因为 $U \cap V = 0$ 则有

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = 0$$

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0$$

由于 $\{u_1 \cdots u_m\}$ $\{v_1 \cdots v_n\}$ 分别线性无关

则 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$

$\mu_1 = \cdots = \mu_n = 0$

所以 $u_1 \cdots u_m, v_1 \cdots v_n$ 线性无关

(iv) 设 U, V 为 $\mathbb{R}^n$ 中的线性闭集，则

$$\dim(U+V) + \dim(U\cap V) = \dim(U) + \dim(V)$$

证明：设 U, V 的维数分别是 m, n，$U\cap V$ 的维数是 $p \le \min\{m,n\}$

取 $U\cap V$ 的一组基 $\alpha_1 \cdots \alpha_p$

① 如果 $p=0$，则为上情形 (iii)，留作习题。

② 因为 $U, V, U\cap V$ 都是线性闭集 且 $U\cap V \subset U$，$U\cap V \subset V$ 则

$\alpha_1 \cdots \alpha_p$ 可以扩充为 U 的一组基

$$\alpha_1 \cdots \alpha_p \ \beta_{p+1} \cdots \beta_m$$

$\alpha_1 \cdots \alpha_p$ 可以扩充为 V 的一组基

$$\alpha_1 \cdots \alpha_p \ \gamma_{p+1} \cdots \gamma_n$$

我们来证明，向量组

$$\alpha_1 \cdots \alpha_p \ \beta_{p+1} \cdots \beta_m, \ \gamma_{p+1} \cdots \gamma_n \text{ 是线性无关的}$$

[因为 $U+V = \langle \alpha_1 \cdots \alpha_p \ \beta_{p+1} \cdots \beta_m \ \gamma_{p+1} \cdots \gamma_n \rangle$
由上可得 $\dim(U+V) = m+n-p$，命题得证]

假设有等式

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_p\alpha_p + b_{p+1}\beta_{p+1} + \cdots + b_m\beta_m + c_{p+1}\gamma_{p+1} + \cdots + c_n\gamma_n = 0$$

$$\Rightarrow W = a_1\alpha_1 + \cdots + a_p\alpha_p + b_{p+1}\beta_{p+1} + \cdots + b_m\beta_m = -(c_{p+1}\gamma_{p+1} + \cdots + c_n\gamma_n)$$

$W \in U\cap V$ 所以 W 可以由 $\alpha_1 \cdots \alpha_p$ 线性表出 即有

$$W = l_1\alpha_1 + \cdots + l_p\alpha_p = -(c_{p+1}\gamma_{p+1} + \cdots + c_n\gamma_n)$$

但是 $\alpha_1 \cdots \alpha_p \ \gamma_{p+1} \cdots \gamma_n$ 线性无关，所以

$$l_1 = \cdots = l_p = c_{p+1} = \cdots = c_n = 0$$

即有 $W = 0$

$$\Rightarrow a_1\alpha_1 + \cdots + a_p\alpha_p + b_{p+1}\beta_{p+1} + \cdots + b_m\beta_m = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = \cdots = a_p = b_{p+1} = \cdots = b_m = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_p \ \beta_{p+1} \cdots \beta_m \ \gamma_{p+1} \cdots \gamma_n \text{ 线性无关} \quad \boxed{}$$

都

证明存在无穷多个形如 $4k+1$ 的素数. [可以在习题课第2节讲]

证明: 假定 m 是一个大于1的整数, 那么 $m!$ 有因数2
所以 $m!$ 是偶数. 因为 $m!^2+1$ 是大于1的奇数, 所以
它必有一个素因子 p. 现在证明 p 必定是形如 $4k+1$ 的素数.
假定 $p=4k+3$

$$m!^{p-1}+1 = m!^{2(2k+1)}+1$$
$$=\left((m!)^2+1\right)\left(m!^{2\cdot 2k}-m!^{2\cdot(2k-1)}+\cdots-m!^2+1\right)$$

所以
$$(m!^2+1)\mid(m!^{p-1}+1)$$
因此由 $p\mid m!)^2+1$ 可得 $\quad p\mid(m!^p+m!)$
由费马小定理可得 $\quad p\mid m!^p-m!$

从而 $\quad p\mid 2\cdot m!$
因 p 是奇素数, 所以 $p\nmid 2$. 因此可知 $p\mid m!$
$p\mid m!^2$ 又因 $p\mid(m!^2+1)\Rightarrow p\mid 1$ 矛盾
因此对每个 $m>1$, $m!^2+1$ 的素因子 p 都是形如 $4k+1$
的数. 现在证明 $p>m$. 不然 $p\mid m!$
$\Rightarrow p\mid m!^2$ 因而 $p\mid 1$ 矛盾. 所以 $p>m$.
由于 m 可以任意大. 所以形状是 $4k+1$ 的素
数有无穷多 $\Box$