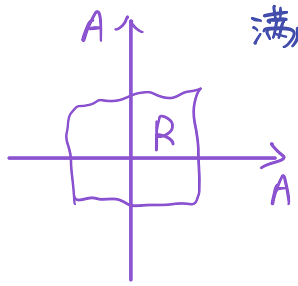
第三次习题课.

• **等价关系**：集合A上的二元关系R为 $A\times A$ 的一个子集，即 $R\subseteq A\times A$.

若对有序对 $(x,y)\in R$，则称 x与y 存在关系R 记为 xRy.



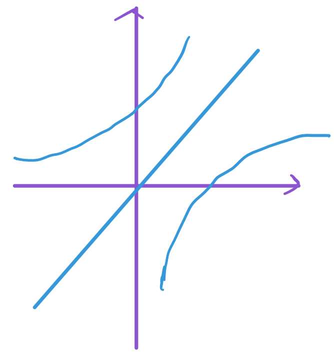
满足：① 反身性：$\forall x\in A,\ x\sim x$

② 对称性：$\forall x,y\in A,\ x\sim y \Rightarrow y\sim x$

③ 传递性：$\forall x,y,z\in A,\ x\sim y$ 且 $y\sim z \Rightarrow x\sim z$

• **图示**：反身性 $\Longleftrightarrow$ "$\sim$" 包含对角线 $y=x$

对称性 $\Longleftrightarrow$ "$\sim$" 关于 $y=x$ 对称.



思考：传递性如何在图示上刻画?

• **例1**：$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 中定义如下二元关系：

$(x,y)\sim(x',y')$ 当且仅当 $\exists\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ 使得 $\begin{cases} x=\lambda x' \\ y=\lambda y' \end{cases}$

则 "$\sim$" 为等价关系.

证：① 反身性：设 $\lambda=1$ 即反身性成立.

② 对称性：若 $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ 即 $\exists\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

s.t. $\begin{cases} x_1=\lambda x_2 \\ y_1=\lambda y_2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_2=\frac{1}{\lambda}x_1 \\ y_2=\frac{1}{\lambda}y_1 \end{cases} \Longleftrightarrow (x_2,y_2)\sim(x_1,y_1)$

③ 传递性：若 $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ 且 $(x_2,y_2)\sim(x_3,y_3)$

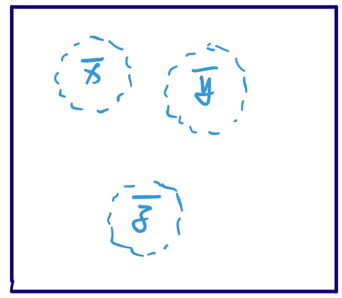
即 $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. s.t.

$$\begin{cases} x_1=\lambda x_2 \\ y_1=\lambda y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\mu x_3 \\ y_2=\mu y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\lambda\mu x_3 \\ y_1=\lambda\mu y_3 \end{cases} \Rightarrow (x_1,y_1)\sim(x_3,y_3)$$

等价关系可以决定集合的一个划分：

等价类： $\bar{x}=\{y\in S \mid x\sim y\}$

此外，$\bar{x}$ 中任何一个元素都可以充当该等价类的一个代表元.



注：① $\bar{a}=\bar{a'} \iff a\sim a'$

② $\bar{a}\neq\bar{b} \iff \bar{a}\cap\bar{b}=\emptyset$

③ 等价类本身是一个集合.

- 商集： 关于 $\sim$ 的所有等价类构成的集合称为 S 关于 $\sim$ 的商集

记为 $S/\sim$.　$\pi: S\longrightarrow S/\sim$,　$x\longmapsto\bar{x}$　(商映射 or 自然投射)

注：① 商集是集合构成的集合　② 商集看作是根据等价关系对集合中的元素进行分类，每一个类就是一个元素.

- 映射分解定理： $\forall$ 映射 $f: A\longrightarrow B$，定义出 A 上的一个等价关系：

$$x\sim_f y \iff f(x)=f(y) \qquad \forall\, x,y\in A.$$

等价类： $\bar{x}=\{y\in A \mid f(y)=f(x)\}$

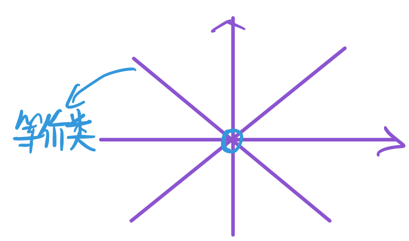
定理：$f: S\to T$ 是映射，π 是关于 $\sim_f$ 的商映射

$\Rightarrow \exists$ 唯一映射 $\bar{f}: S/\sim_f\longrightarrow T$ s.t. $f=\bar{f}\circ\pi$

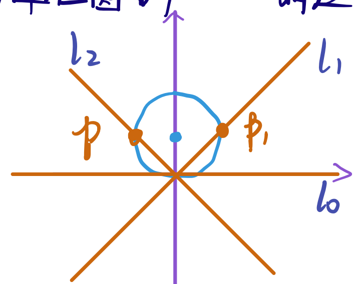
且该映射是单射.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T \\ & S/\sim_f \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

- 例1中： $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}/\sim$ = {所有过原点的直线}
(挖去原点)



(一) 可以建立 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}/\sim$ 到以 $(0,1)$ 为圆心的单位圆的一一对应.

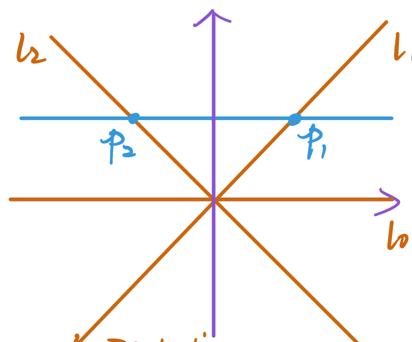


$l_0 \longrightarrow 0$

$l_1 \longrightarrow p_1$

$l_2 \longrightarrow p_2$

(二). 可以建立 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}/\sim$ 到过 $(0,1)$ 的直线 L（并上无穷远点）



$l_0 \longrightarrow \infty$

$l_1 \longrightarrow p_1$

$l_2 \longrightarrow p_2$

(一),(二) 中 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}/\sim$ 的两种对应 叫作 射影直线

（不一定都是直线）

1. 设 $x\in(0,1)$，证明 $f(x)=\tan(\pi(x-\frac{1}{2}))$ 为 $(0,1)$ 区间到实数轴的一个双射.

证：由 $f'(x)=\dfrac{\pi}{\cos^2(\pi(x-\frac{1}{2}))}>0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 内严格递增.

即 $\forall\, x_1,x_2\in(0,1)\quad x_1<x_2$

$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

$\Rightarrow f$ 是单射

又 $\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

$\therefore f$ 是满射.

2. 设 $f(x)=\sin x$，且定义域为 $\mathbb{R}$.

(1) $\forall y\in[-1,1]$，求 $f^{-1}(\{y\})$

(2) 求由 f 诱导的等价关系 $\sim_f$ 的商集 $(x\sim_f x' \Leftrightarrow f(x)=f(x'))$

(3) 刻画上述等价关系诱导的商映射 π

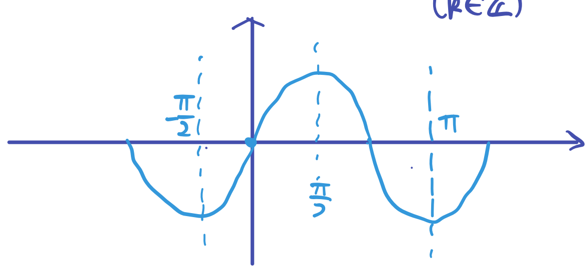
(1). $f^{-1}(\{y\})=\{x \mid \sin x=y\}$

(2) 由等价关系 $x\sim x' \Longleftrightarrow \sin x=\sin x'$

构成的等价类: $\overline{x}=\{x' \mid \sin x=\sin x'\}$

$=\{x' \mid x'=x+2k\pi,\ \text{or}\ x'=\pi-x+2k\pi\}$ $(k\in\mathbb{Z})$

$\Rightarrow \mathbb{R}/\sim_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$



(3) 商映射: $\pi: \mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}/\sim_f$

$x \longmapsto \overline{x}=\{x' \mid x'=x+2k\pi$ 或 $x'=\pi-x+2k\pi\}$ $(k\in\mathbb{Z})$

- 偏序关系：

  A上的二元关系"$\leq$"满足如下条件：

  ① 反身性：$\forall x\in A$，$x\leq x$

  ② 反对称性：$\forall x,y\in A$，$x\leq y$ 且 $y\leq x \Rightarrow x=y$

  ③ 传递性：$\forall x,y,z\in A$，$x\leq y$，$y\leq z \Rightarrow x\leq z$.

- 偏序集：$(A,\leq)$ 为偏序集合.

  最大元：$x\in A$ 满足：$\forall y\in A \Rightarrow y\leq x$ （整体）

  极大元：$x\in A$ 满足：若 $\exists y\in A$ s.t. $x\leq y \Rightarrow x=y$.（局部）

  注：最大元与A中所有元素都可比.

  极大元与A中部分元素可以不可比.

- 命题：非空有限偏序集必存在极大元.

  证：反证法.

  设 $(A,\leq)$ 中没有极大元，其中 $|A|<+\infty$

  则 $\forall x\in A$，$\exists y\in A$，$x<y$.（严格）

  同理可构造一条无限长的链：

  $x_1\in A \Rightarrow \exists x_2\in A$ $x_1<x_2$

  $x_2\in A \Rightarrow \exists x_3\in A$ $x_2<x_3$

  $\vdots$

  $\Rightarrow x_1<x_2<x_3<\cdots$

  由自反性与反对称性 $\Rightarrow x_1,x_2,x_3,\cdots$ 互不相同.

  即与 $|A|<\infty$ 矛盾.

  则命题成立.

3. 设 | 是Z^+上的整除关系，即对 $a,b\in Z^+$，如果存在 $m\in Z^+$ 使得 $b=ma$ 则 $a|b$，验证"|"是偏序 并举例说明"|"不是全序.

① 自反性：$\forall a\in Z^+$ $a=1\cdot a$ $\Rightarrow a|a$

② 反对称性：$\forall a,b\in Z^+$ 若 $a|b$ 即 $b=ma$

又 $b|a$ 即 $a=nb$ $\Rightarrow m=n=1$ 即 $a=b$

③ 传递性：$\forall a,b,c\in Z^+$，$a|b$，$b|c$

$\Rightarrow b=m\cdot a$ $c=n\cdot b$ $m,n\in Z^+$

$\Rightarrow c=n\cdot m\cdot a$ $a|c$

全序：$\forall x,y\in S$ 有 $x\preccurlyeq y$ 或 $y\preccurlyeq x$

例：2与3 是正整数 但无整除关系

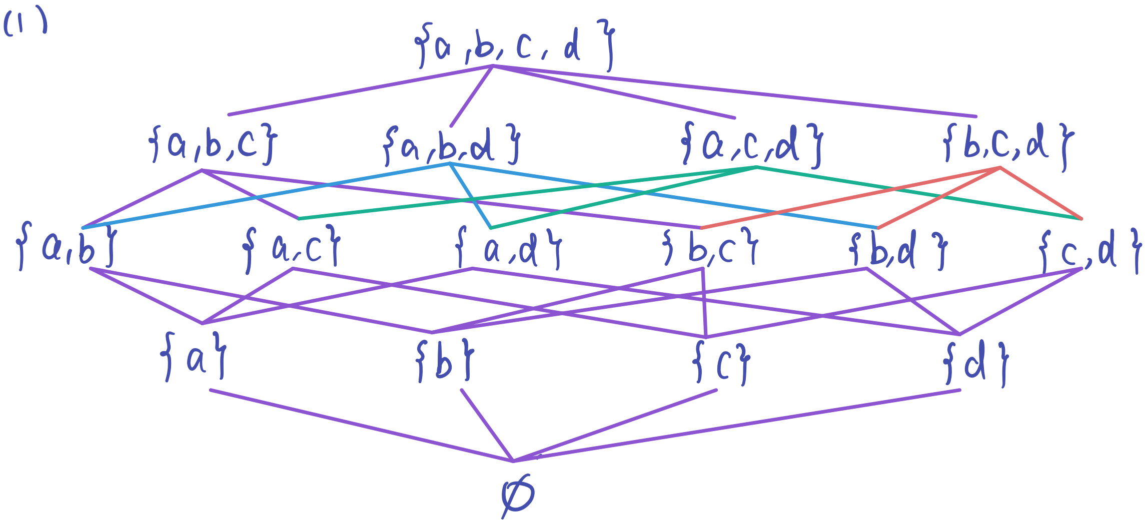
即 $2\nmid 3$ 且 $3\nmid 2$.

4. 画出下述偏序集的图，并给出偏序集的极小元、极大元、最小元和最大元

(1) 四元集合$\{a,b,c,d\}$的所有子集组成的集合（偏序关系由集合包含关系给出）

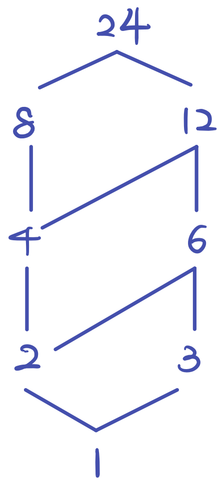
(2) 整数24的全体正因子的集合（偏序关系由整除给出）.

(1)



极小元，最小元：ϕ　　　极大元，最大元：$\{a,b,c,d\}$

(2)



最大元，极大元：24

最小元，极小元：1

若去掉 1.

极小元：2，3.

最小元：无.

- 设 $\sigma \in S_n \setminus \{e\}$ 是互不相交的循环 $\tau_1, \cdots, \tau_m$ 的积
  则 $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{lcm}(\mathrm{ord}(\tau_1), \cdots, \mathrm{ord}(\tau_m))$
- $(i_1 i_2 \cdots i_k)^{-1} = (i_k i_{k-1} \cdots i_2 i_1)$

5. (1) $\pi = (1\,3\,8\,5)(2\,6)(4\,9\,7)$

$\mathrm{ord}(\pi) = \mathrm{lcm}(4, 2, 3) = 12$

$\pi^{-1} = (5\,8\,3\,1)(6\,2)(7\,9\,4)$

$= (1\,5\,8\,3)(2\,6)(4\,7\,9)$

(2) 写成循环分解形式：

$(1\,6\,5)(2\,8\,7\,4)(3) \times (1\,2\,4\,5)(3)(6\,7\,8)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$= (1\,8\,5\,6\,4)(2)(3)(7)$