第二次习题课.

1. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 考虑线性方程组

$$\begin{cases} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y = a \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y = b \end{cases}$$

• 线性方程组确定 $\Updownarrow$ 系数矩阵对应行列式非零

(a) 证明该方程组是确定的;

(b) 设

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

如果α和β不全为零，则记$\ell(\alpha,\beta)$ 是点 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 与原点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的连线，计算$\ell(u,v)$ 和 $\ell(a,b)$ 的夹角，其中 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 是上述方程组的解且 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) 方程组系数矩阵行列式

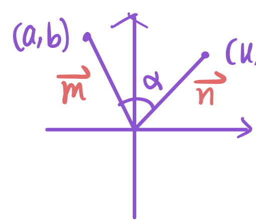
$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0.$$

∴ 方程组确定.

解为: $x = \begin{vmatrix} a & -\sin\theta \\ b & \cos\theta \end{vmatrix} = a\cos\theta + b\sin\theta$ $\quad y = \begin{vmatrix} \cos\theta & a \\ \sin\theta & b \end{vmatrix} = b\cos\theta - a\sin\theta$

(b) 由(a)知.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta + b\sin\theta \\ b\cos\theta - a\sin\theta \end{pmatrix}$$



$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\langle \vec{m}, \vec{n} \rangle$

设 $l(u,v)$ 和 $l(a,b)$ 夹角为 α.

则 $\cos\alpha = \dfrac{ua + vb}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{u^2+v^2}} = \dfrac{a^2\cos\theta + b^2\cos\theta}{a^2+b^2} = \cos\theta$

∴ $l(u,v)$ 和 $l(a,b)$ 夹角为 $\min\{\theta, \pi-\theta\} \pmod{\pi}$

知识点回顾.

• 映射： $f: S \longrightarrow T$ 记 $f(x)=y$.
$x \longmapsto y$ (唯一).

• 特殊映射：

① 恒同映射：(identity)

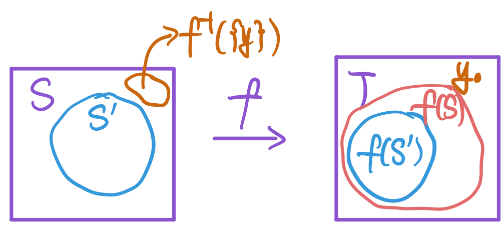
$$id_S: S \longrightarrow S$$
$$x \longmapsto x$$

② 嵌入：$S' \subseteq S$, $S' \neq \emptyset$

$$id_S: S' \longrightarrow S$$
$$x \longmapsto x$$

③ 投影 (projection)：

$$p: S \times T \longrightarrow S$$
$$(x, y) \longmapsto x$$



• $f: S \longrightarrow T$ 映射

• 像集： $f(S) = \mathrm{im}(f)$ 映射f的像集.
若 $S' \subseteq S$ 则 $f(S') = \{f(x) \mid x \in S'\} \Rightarrow f(S') \subseteq f(S)$

• 原像集： $f^{-1}(T) = S$ 映射 f 的原像集
若 $T' \subseteq T$ 则 $f^{-1}(T') = \{f^{-1}(y) \mid y \in T'\} \Rightarrow f^{-1}(T') \subseteq \underset{S}{\underset{\parallel}{f^{-1}(T)}}$

• 单射： ① $\forall\, x_1 \neq x_2 \in S \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
② $\forall\, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
③ $\forall\, y \in T$, $|f^{-1}(\{y\})| \leq 1$.

• 满射： ① $\forall\, y \in T$, $\exists\, x \in S$, s.t. $y = f(x)$
② 对 $\forall\, y \in T$, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$.

• 双射： ① f 既是单射 又是满射. ② $\forall\, y \in T$, $|f^{-1}(\{y\})| = 1$

2. 设 $f: A \to B, g: B \to C$ 是两个映射. 证明：

(a) 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射；

(b) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射.

证：(a) (一)：单射：$\forall x_1 \neq x_2 \in A$，$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f$ 是单射.

设 $\forall x_1 \neq x_2 \in A$，

由 $g \circ f$ 是单射，$\Rightarrow g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$

即 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$

由 g 是一个映射 $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(二)：单射：若 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f$ 是单射.

设 $f(x_1) = f(x_2)$ 则 $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

由 $g \circ f$ 是单射 $\Rightarrow x_1 = x_2$ 即 f 也是单射.

(b). (一)：满射：$\forall c \in C$，$\exists b \in B$ st. $g(b) = c \Rightarrow g$ 满射.

设 $c \in C$ 由 $g \circ f$ 是满射

$\Rightarrow \exists a \in A$ $g \circ f(a) = c$ 即 $g(f(a)) = c$

故 $\exists$ $b = f(a) \in B$ 满足 $g(b) = c \Rightarrow g$ 是满射

定理 2.1 设 $f: A \to B$ 为映射.

(1) f 为单射当且仅当：$\exists h: B \to A$ 为映射，使得 $h \circ f = i_A$;

(2) f 为满射当且仅当：$\exists h: B \to A$ 为映射，使得 $f \circ h = i_B$.

证：(1) "$\Leftarrow$" $\exists h: B \longrightarrow A$ 为映射 $h \circ f = id_A \Rightarrow$ 单射

由习题 2(a) $\Rightarrow f$ 单射

f 的像集.

"$\Rightarrow$" $\forall y \in B$，设 $h(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & y \in f(A) \\ x', & y \notin f(A) \end{cases}$ $(\forall t \in A)$

则 h 是 B 到 A 的映射

$$h: B \longrightarrow A$$
$$y \longmapsto f^{-1}(y). \quad y \in \mathrm{Im}(f).$$
$$y \longmapsto x' \quad y \notin \mathrm{Im}(f)$$

因此, $\forall x \in A$, $h \circ f(x) = h(y) = x \Rightarrow h \circ f = id_A$

(2) "$\Leftarrow$" $\exists\, h: B \longrightarrow A$ 为映射 s.t. $f \circ h = id_B$

$\forall y \in B \quad f \circ h(y) = y$ 即 $f(h(y)) = y$

$\Rightarrow \exists\, x = h(y) \in A$ s.t. $f(x) = y$. 即 f 是满射.

"$\Rightarrow$" 由 f 是满射

即 $\forall y \in B \quad \exists\, x \in A$ s.t. $f(x) = y$ 即 $f^{-1}(\{y\})$ 非空.

设 $h: B \longrightarrow A$ $\qquad$ h 是一个映射

$y \longmapsto x \in f^{-1}(\{y\})$ $\qquad$ 且 $f \circ h(y) = f(x) = y$

即 $f \circ h = id_B$

3. 设 A, B 是集合 X 的两个子集合，$f: X \to Y$ 是一个映射，证明：

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$，并举例说明存在真包含的情况.

证: (a) "$\subseteq$" $\forall y \in f(A \cup B) \quad \exists\, x \in A \cup B$

即 $x \in A$ 或 $x \in B$ s.t. $y = f(x)$

若 $x \in A$ 即 $f(x) \in f(A)$ 若 $x \in B$ 即 $f(x) \in f(B)$

$\Rightarrow y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$

$\Rightarrow f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$.

"$\supseteq$" $A \subseteq A \cup B \quad B \subseteq A \cup B$

$\Rightarrow$ 对任意映射 $f: X \to Y$

$f(A) \subseteq f(A \cup B) \quad f(B) \subseteq f(A \cup B)$

$\Rightarrow f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$

综上, $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b)① 法(一)：

设 $\forall y \in f(A\cap B) \Rightarrow \exists x \in A\cap B$ s.t. $f(x)=y$.

即 $x\in A$ 且 $x \in B \Rightarrow y=f(x)\in f(A)\cap f(B)$.

$\Rightarrow f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

法(二)：

由 $A\cap B\subseteq A \Rightarrow f(A\cap B)\subseteq f(A)$ $\Rightarrow f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

$A\cap B \subseteq B \Rightarrow f(A\cap B)\subseteq f(B)$.

② 例： $A=\{1,2,3\}$ $B=\{1,-2,-3\}$

(合理即可) $f: x \longrightarrow x^2$ 即 $f(x)=x^2$

$A\cap B=\{1\}$ $f(A\cap B)=\{1\}$

$f(A)=\{1,4,9\}$ $f(B)=\{1,4,9\}$

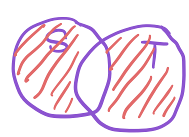
$f(A)\cap f(B)=\{1,4,9\} \supsetneq f(A\cap B)=\{1\}$.

4. 用 $S\Delta T$ 表示两个集合 S 与 T 的对称差：$S\Delta T=(S\setminus T)\cup(T\setminus S)$. 证明：

$$S\Delta T=(S\cup T)\setminus(S\cap T).$$

证："$\subseteq$" $\forall y\in S\Delta T=(S\setminus T)\cup(T\setminus S)$

即 $y\in S\setminus T$ 或 $y\in T\setminus S$



若 $y\in S\setminus T$

由 $S\subseteq S\cup T \Rightarrow y\in S\setminus T\subseteq (S\cup T)\setminus T$

由 $S\cap T\subseteq T \Rightarrow y\in (S\cup T)\setminus(S\cap T)$

同理亦得 即 $(S\setminus T)\cup(T\setminus S)\subseteq (S\cup T)\setminus(S\cap T)$

"$\supseteq$" $\forall y\in(S\cup T)\setminus(S\cap T)$

若 $y\in S$，即 $y\in S\setminus(S\cap T) \Leftrightarrow y\in S\setminus T$

若 $y\in T$，即 $y\in T\setminus(S\cap T)\Leftrightarrow y\in T\setminus S$

$\Rightarrow y\in(S\setminus T)\cup(T\setminus S)$ 综上 等式即证.

5. 设 $S=\mathbb{R}^2\setminus\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$. 如果二维向量 $\mathbf{u},\mathbf{v}\in S$ 在以原点为圆心的某个圆上，则称 $\mathbf{u},\mathbf{v}$ 有关系 R，记为 $\mathbf{u}R\mathbf{v}$.

(a) 验证 R 是等价关系；

(b) 设 $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 由习题 1 给出. 说明 $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}R\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 是否成立.

证：(a) ① 自反性：$\forall u\in S$ u 自身在以原点为圆心的某个圆上，显然 uRu 成立.

② 对称性：若 uRv，即 $u,v\in S$ 在以原点为圆心的某个圆上，显然 vRu 亦成立.

③ 传递性：若 uRv，vRw 即 $u,v,w\in S$ 同圆.

$\Rightarrow uRw$ 成立.

(b) $$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos\theta+b\sin\theta\\ b\cos\theta-a\sin\theta\end{pmatrix}$$

由 $u^2+v^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta+\cancel{2ab\sin\theta\cos\theta}-\cancel{2ab\cos\theta\sin\theta}$

$=a^2+b^2$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ 同在 $x^2+y^2=t$ 的圆上，其中 $t=a^2+b^2$.

集合论：

- 德国数学家 Georg Cantor 康托创立 （1845—1918）.
- 集合之间的映射比集合元素的个数计算更基本.
- 比较两个有限集合元素的多少：

① 先数出每个集合元素个数 $\Rightarrow$ 比较大小

② 如果从集合 A 到 B 存在单射 $f: A \longrightarrow B$

$\Rightarrow |A| \le |B|$.

方法① 只能应用于有限、可数集合.

将自然数集合 $\mathbb{N}$ 作参照物.

- 可数集：如果存在双射 $f: A \longrightarrow \mathbb{N}$，则称集合 A 是可数的.

如果存在单射 $g: A \longrightarrow \mathbb{N}$，则称集合 A 是至多可数的.

注：$|A| = |B| \Longleftrightarrow$ 存在双射 $f: A \longrightarrow B$

例1：整数集 $\mathbb{Z}$ 是可数的.

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{N} \\ -2x-1 & x \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$

例2：有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可数的.

任意有理数可以写成 $\frac{p}{q}$ $\quad p, q \in \mathbb{Z}$. $(q \neq 0)$

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ $\qquad g: \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$

$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \\ -2x-1 & x \in \mathbb{Q}^- \end{cases}$ $\qquad \longmapsto p$

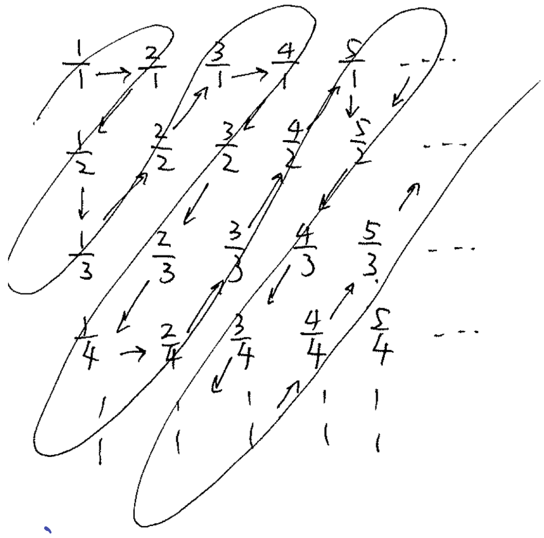
$g: Q^+ \longrightarrow \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

按图示去数

即 $g(\frac{1}{1})=1, g(\frac{2}{1})=2$

$g(\frac{1}{2})=3, g(\frac{1}{3})=4$

$\vdots$



例3：实数集 $\mathbb{R}$ 不可数

考虑 $I=[0,1)$ 中实数. 反证：假设 I 可数：

$\Rightarrow$ $0.0\cdots\cdots \longrightarrow 0$

$0.a_{11}\,a_{21}\,a_{31}\cdots \longrightarrow 1$

$0.a_{12}\,a_{22}\,a_{32}\cdots \longrightarrow 2$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

"对角线证明法"

则 $0.a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\cdots\cdots$ 不在此列表中 $\Rightarrow$ 矛盾.