§1. 低阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

注：3阶行列式由6项取自不同行不同列乘积之和. $6=3!$

例1. 范德蒙行列式 (Vandermonde, 1735-1796)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b^2 & c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$$

$$= bc^2 - cb^2 - ac^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2$$

$$= (b-a)c^2 + c(a^2-b^2) + ab(b-a)$$

$D \neq 0 \iff a, b, c$ 互不相同.

$$= (b-a)(c^2 - ac - bc + ab)$$

$$= (b-a)(c-b)(c-a)$$

例2. 三阶行列式中的6项不可能同时为正(或同时为负)

证明. 由定义, 行列式的6项为:

$T_1 = a_{11}a_{22}a_{33}$, $T_2 = -a_{11}a_{23}a_{32}$, $T_3 = a_{12}a_{23}a_{31}$

$T_4 = -a_{12}a_{21}a_{33}$, $T_5 = a_{13}a_{21}a_{32}$, $T_6 = -a_{13}a_{22}a_{31}$

注意到: $T_1T_2T_3T_4T_5T_6 = -(\text{3阶行列式9个元素的乘积})^2$ 为负的.

所以这6项不可能同时为正(或同时为负)

例3（习题课为不全讲）

设一个三阶行列式之素为 ±1，则行列式值只可能为 0 或 ±4.

证明：每项乘积为 ±1，6项乘积为 −1.

① 每项为奇数，所以 6项之和为偶数.（作业题）

② 由例2，6项不可能全为1或−1，则其值不可能为 ±6.

③ 6项乘积为负的，所以只可能有1个，3个或5个项为1.
由此行列式值不可能为 ±2.

综上所述，行列式值只可能为 0 或 ±4.

$$0=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},\quad 4=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix},\quad -4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

§2. 韦达 (vieta, 1540–1603) 定理.

$$f(x)=ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}. \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

3次多项式：
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

令 $x=y-\dfrac{b}{3a}$，代入

$$f\left(y-\frac{b}{3a}\right)=ax^3+px+q$$

$$\begin{cases} p=c-\dfrac{b^2}{3a} \\ q=d-\dfrac{bc}{3a}+\dfrac{2b^3}{27a^2} \end{cases}$$

集合论是由德国数学家 Georg. Cantor 康托创立的.

康托 (1845–1918).

"没有人可以将我们从康托创立的伊甸园中赶出来"

"No one shall expel us from the paradise that cantor has created"

— 希尔伯特
Hilbert

集合之间的映射比集合元素的个数计算更基本.

比较两个有限集合元素的多少可以有两种办法:

① 先数出每个集合的元素个数, 然后比较两个数大小.

② 如果从集合 A 到集合 B 存在单射, 则集合 A 的元素个数必然不多于集合 B 的元素个数.

方法①是无法用于"比较"两个无穷集合的多少的.

我们将自然数集合作为参照物.

"上帝创造了自然数, 其它都是人造的"

— 克隆尼克
Kronecker.

定义: 我们称集合 A 为<u>可数的</u>, 如果存在双射

$$\phi: A \to \mathbb{N}.$$

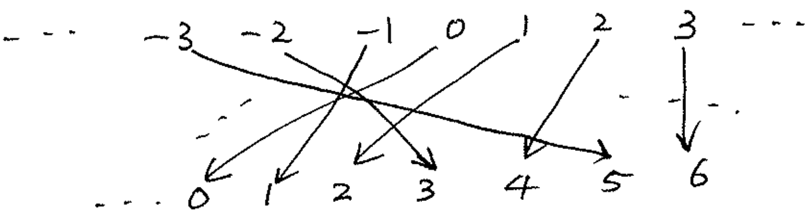
称 A 为<u>至多可数的</u>, 如果存在单射: $\phi: A \to \mathbb{N}$.

注: 我们一般说集合 A, B "元素个数相同", 若存在双射 $\phi: A \to B$.

例1. 整数是可数的.

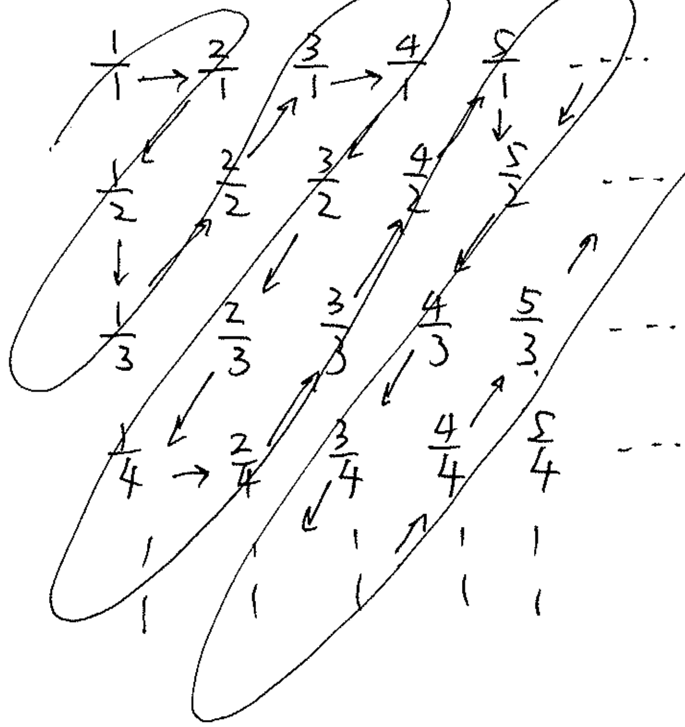
$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{N} \\ -2x-1 & x \in \mathbb{Z}^- \end{cases}$$



例2. 有理数集合是可数的

任何有理数集合可以写成 $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$.



$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \\ -2x-1 & x \in \mathbb{Q}^- \end{cases}$$

注：类似地，我们可以证明：

有限个可数集合的并是可数的

用更难些知识（即选择公理），可以证明代数数集合也是可数的.

例3. 实数集合是不可数的

我们可以只考虑 $[0,1)$ 中的实数，如果可数（用反证法），则可列出所有实数

$$\begin{array}{lcl}
0 & \leftrightarrow & 0.0\cdots \\
1 & \leftrightarrow & 0.a_{11}\,a_{21}\,a_{31}\cdots\cdots \\
2 & \leftrightarrow & 0.a_{12}\,a_{22}\,a_{32}\cdots \\
3 & \leftrightarrow & 0.a_{13}\,a_{23}\,a_{33}\cdots\cdots \\
\vdots & & \quad\vdots \quad \vdots \quad \ddots
\end{array}$$

"对角线证明法"

（非常有用!!!）

我们构造一个新的数：$0.a_{11}^{\pm1}\,a_{22}^{\pm1}\,a_{33}^{\pm1}\cdots\cdots$

该数必不在此列表中. 所以得到矛盾！

推论：必然存在超越数!!

但是这并没有给出具体数，如 π, e, 等是否为超越的.