第一次习题课.

• (一): 线性方程组 $\longleftrightarrow$ 矩阵.

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}. \qquad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

系数矩阵. $m\times n$.

$\vec{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$ 加入到系数矩阵 A 最后一列之后.

$\Rightarrow$ $(A : \vec{b})$ 增广矩阵 $m\times(n+1)$.

1. 设 $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,3,4$. 写出满足 $p(\alpha_i)=\beta_i$ $i=1,2,3,4$ 的三次实多项式 $p(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ 关于变量 a, b, c, d 的系数矩阵和增广矩阵.

线性方程组:
$$\begin{cases} \underline{a}\alpha_1^3 + \underline{b}\alpha_1^2 + \underline{c}\alpha_1 + \underline{d} = \beta_1 \\ \underline{a}\alpha_2^3 + \underline{b}\alpha_2^2 + \underline{c}\alpha_2 + \underline{d} = \beta_2 \\ \underline{a}\alpha_3^3 + \underline{b}\alpha_3^2 + \underline{c}\alpha_3 + \underline{d} = \beta_3 \\ \underline{a}\alpha_4^3 + \underline{b}\alpha_4^2 + \underline{c}\alpha_4 + \underline{d} = \beta_4 \end{cases}$$

区分变量与系数!

系数矩阵: $\begin{pmatrix} \alpha_1^3 & \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 \\ \alpha_2^3 & \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 \\ \alpha_3^3 & \alpha_3^2 & \alpha_3 & 1 \\ \alpha_4^3 & \alpha_4^2 & \alpha_4 & 1 \end{pmatrix}$ 增广矩阵 $\left(\begin{array}{cccc:c} \alpha_1^3 & \alpha_1^2 & \alpha_1 & 1 & \beta_1 \\ \alpha_2^3 & \alpha_2^2 & \alpha_2 & 1 & \beta_2 \\ \alpha_3^3 & \alpha_3^2 & \alpha_3 & 1 & \beta_3 \\ \alpha_4^3 & \alpha_4^2 & \alpha_4 & 1 & \beta_4 \end{array}\right)$

(二): 相容与确定:

相容: 线性方程组有解.

确定: 线性方程组有唯一解.

不确定: 线性方程组有无穷多解

$$
M = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & \downarrow\ell_1 & & & & \downarrow\ell_2 & & & & \downarrow\ell_k & & & & \\
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
0\cdots0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & *
\end{pmatrix}
\end{array}
\longrightarrow \text{增广矩阵.}\quad k\times(n+1)
$$

M 对应线性方程组 相容 $\Longleftrightarrow$ $l_k < n+1$

M 对应线性方程组 确定 $\Longleftrightarrow$ $l_k < n+1$ 且 $k=n$.

一般矩阵 $\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{初等}}$ 阶梯型矩阵.

① 交换两行　② 将某一行加到另一行上　③ 数乘某一行.

2. 设 $a\in\mathbb{R}$. 判断下面的方程组解的相容性和确定性情况.

(1) $\begin{cases} x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1+x_3+x_4=2 \\ x_1+x_2+x_4=3 \\ x_1+x_2+x_3=4 \end{cases}$
$$
M=\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array}\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)
$$

$$
M \xrightarrow{r_1\Leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-r_2]{r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_4-r_2]{r_4-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-\frac{1}{2}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}
$$

$l_1=1$　$l_2=2$　$l_3=3$　$l_4=4$　$\Rightarrow$ 确定.

(2) $\begin{cases} -2x_1+x_2+2x_3=1 \\ 4x_1+7x_2+4x_3=1 \\ 5x_1+2x_2-x_3=-1 \end{cases}$ $M=\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$M \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 4 & 7 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 9 & 8 & 3 \\ 0 & \frac{9}{2} & 4 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 9 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $l_1=1$ $l_2=2<4$. ∴ 相容. 不确定

(3) $\begin{cases} ax_1+(1-a)x_3=-1 \\ x_1-ax_2=1 \\ x_2+x_3=1 \end{cases}$ $M=\left(\begin{array}{ccc:c} a & 0 & 1-a & -1 \\ 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$M \xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1-a & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2 & 1-a & -1-a \end{pmatrix}$ ($a\neq 0$时).

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a-a^2 & -1-a-a^2 \end{pmatrix}$ $M \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

① 当 $1-a-a^2\neq 0$ 时 即 $a\neq\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 时 $\begin{cases} a=0 \text{ 时} & \text{确定.} \\ a\neq 0 \text{ 时} & \text{确定.} \end{cases}$

② 当 $1-a-a^2=0$ 时 即 $a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 时 $a^2+a+1\neq 0$. 方程组不相容

3. 设 3×4 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 6 & 3 & b \\ 3 & -2 & 1 & c \end{pmatrix} \longleftrightarrow L$. 线性方程组.

(a) a, b, c 满足什么条件时 L 相容.

(b) 是否存在 a, b, c 使 L 确定.

(a) $A \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 5 & 2 & b-a \\ 0 & -5 & -2 & c-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 5 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & b+c-4a \end{pmatrix}$

$b+c-4a=0$ 时 相容.

(b) 在(a)前提下，$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 5 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 不存在 a,b,c 使得方程组确定

4. 设 H 有两组解：$x_1=\alpha_1,\cdots,x_n=\alpha_n$ 和 $x_1=\beta_1,\cdots,x_n=\beta_n$

(a) 若 H 是齐次的，证明：$\forall\ u,v\in\mathbb{R}$，

$x_1=u\alpha_1+v\beta_1,\cdots,x_n=u\alpha_n+v\beta_n$ 也是H的解.

(b) 若H是非齐次的，证明：$\forall\ k\in\mathbb{R}$

$x_1=\alpha_1+k(\alpha_1-\beta_1),\cdots,x_n=\alpha_n+k(\alpha_n-\beta_n)$ 也是H的解.

(a) H 齐次，设 H为：$A\vec{x}=\vec{0}$

$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $A: m\times n$.

$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$ $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ $\vec{\beta}=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ 是H两组解

即 $A\vec{\alpha}=0$ $A\vec{\beta}=0$ $\Rightarrow A(u\vec{\alpha}+v\vec{\beta})=uA\vec{\alpha}+vA\vec{\beta}$

$=0$

(b) H 非齐次：设 H为 $A\vec{x}=\vec{b}$

$\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $A\vec{\alpha}=\vec{b}$ $A\vec{\beta}=\vec{b}$ $\Rightarrow A(\vec{\alpha}+k(\vec{\alpha}-\vec{\beta}))=A\vec{\alpha}+kA\vec{\alpha}-kA\vec{\beta}$

$=b+kb-kb$

$=b$

二元一次方程： $Ax+By+C=0$

二元二次方程： $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$

线性方程： $a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$ $\Rightarrow$ 变量对应次数为1.

齐次线性方程组： 次数全相等 $\Rightarrow$ 常数项全为0. $A\vec{x}=\vec{0}$

非齐次线性方程组： 常数项不全为0. $A\vec{x}=\vec{b}$.

5. 用数学归纳法证明：

(a) $(1+h)^n \geq 1+nh$ 其中 $n\in\mathbb{N}$, $h>-1$;

Pf: ① $n=1$ 时 左式 $=1+h \geq$ 右式 成立.

② 设 $n=k$ 时 不等式成立.

$(1+h)^k \geq 1+kh$

③ 当 $n=k+1$ 时 由 $h>-1 \Rightarrow 1+h>0$

左式 $=(1+h)^k\cdot(1+h) \geq (1+kh)\cdot(1+h) = 1+h+kh+kh^2$

$= 1+(k+1)h+kh^2$

$\geq 1+(k+1)h$.

即 $n=k+1$ 时 不等式成立, 即证.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ $n\in\mathbb{N}^*$.

Pf: ① $n=1$ 时 左式 $=1^3=\left(\frac{1\times2}{2}\right)^2$

② 假设 $n=t$ 时, 有 $\sum\limits_{k=1}^{t} k^3 = \left(\frac{t(t+1)}{2}\right)^2$

③ 当 $n=t+1$ 时, $\sum\limits_{k=1}^{t+1} k^3 = \sum\limits_{k=1}^{t} k^3+(t+1)^3$

$=\left(\frac{t(t+1)}{2}\right)^2+(t+1)^3$

$=(t+1)^2\left(\frac{t^2}{4}+t+1\right)$ 即证

$=\left(\frac{(t+1)(t+2)}{2}\right)^2$

数学归纳法：

证明常用方法：数学归纳法 & 反证法.

↓

以自然数的皮亚诺公理系统为基础.

数学归纳法原理：（多米诺骨牌原理）

对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在某个命题 $p(n)$，如果下述两条成立：

(1) $p(1)$ 成立

(2) 对给定任意 $k \in \mathbb{N}$，由 $p(k)$ 成立总能推出 $p(k+1)$ 成立

$\Rightarrow$ 则对 $\forall n \in \mathbb{N}$，$p(n)$ 成立

例：令 $S(n) = \sin(\varphi) + \sin(2\varphi) + \cdots + \sin(n\varphi)$

$T(n) = \cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + \cdots + \cos(n\varphi)$

试证明：
$$S(n) = \frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})\sin(\frac{(n+1)}{2}\varphi)}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \quad (1)$$

$$T(n) = \frac{\sin(\frac{n\varphi}{2})\cos(\frac{(n+1)}{2}\varphi)}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \quad (2)$$

证：

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$　　$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$　　$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

① 当 $n=1$ 时　$S(1) = \sin\varphi$　$T(1) = \cos\varphi$　上式成立.

② 设 $n=k$ 时　(1)式成立　（以证明(1)举例）

(1)：即 $S(k) = \dfrac{\sin(\frac{k\varphi}{2})\sin(\frac{(k+1)}{2}\varphi)}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$

则 $S(k+1) = S(k) + \sin((k+1)\varphi)$

$$= \frac{\sin(\frac{k\varphi}{2})\sin(\frac{(k+1)}{2}\varphi)}{\sin(\frac{\varphi}{2})} + \sin((k+1)\varphi)$$

$$= \frac{\sin(\frac{k\varphi}{2})\sin(\frac{(k+1)\varphi}{2}) + \sin(\frac{\varphi}{2})\sin((k+1)\varphi)}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$$

$\sin\left(\frac{k\varphi}{2}\right)=\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}-\frac{\varphi}{2}\right)$

$=\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$-\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$$=\frac{\boxed{\sin\left(\frac{k\varphi}{2}\right)}\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)+2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{(k+2)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

即 $n=k+1$ 时 (1)式成立

由数学归纳法，对 $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$，(1)式成立.

(2)：设 $n=k$ 时．(2)式成立　即 $T(k)=\frac{\sin\left(\frac{k\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$

则 $n=k+1$ 时

$$T(k+1)=\frac{\sin\left(\frac{k\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}+\cos((k+1)\varphi)$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{k\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos((k+1)\varphi)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{k\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)-\cos\left(\frac{k\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$+\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos((k+1)\varphi)+\cos\left(\frac{k\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$\cos((k+1)\varphi)-1$

$=-2\sin^2\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)$

$$=\frac{-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos((k+1)\varphi)+\cos\left(\frac{k\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{k+1}{2}\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$\cos\left(\frac{k\varphi}{2}\right)=\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$+\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$$=\frac{\left(-2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)+\cos\left(\frac{k\varphi}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{k+1}{2}\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{(k+2)\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$ 即证 $n=k+1$ 时 (2)式成立.

由数学归纳法，对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (2)式成立.