数学归纳法

数学归纳法与反证法是两种常用的证明方法。数学归纳法是以自然数的皮亚诺公理系统为基础的。

数学归纳法原理（多米诺骨牌原理）

对每个 $n\in\mathbb{N}$，存在某个命题 $p(n)$，如果下述两条成立：

(1) $p(1)$ 成立；

(2) 对给定任意 $k\in\mathbb{N}$，由 $p(k)$ 成立总能推出 $p(k+1)$ 成立。

则对所有 $n\in\mathbb{N}$，$p(n)$ 成立。

§1. 例1.

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (1)$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

证明：（以(2)为例）

(1) 当 $n=1$ 时，上式两边都为 1，所以当 $n=1$ 时，命题成立。

(2) 假设上式对 $n=k$ 时成立，即有

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

考虑

$$\begin{aligned}1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3&=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3\\&=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)\\&=(k+1)^2\,\frac{k^2+4k+4}{4}\\&=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

所以 $n=k+1$ 时，命题成立。由数学归纳法，(2)式对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都成立。

例2. 令 $S(n) = \sin(\varphi) + \sin(2\varphi) + \cdots + \sin(n\varphi)$

$C(n) = \cos(\varphi) + \cos(2\varphi) + \cdots + \cos(n\varphi)$

试证明

$$S(n) = \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (1)$$

$$C(n) = \frac{\sin\left(\frac{n\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \quad (2)$$

证. 回顾一下三角函数的和差公式

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

(1) 当 $n=1$ 时，公式显然成立. （以证明(1)为例）

(2) 假设 $n=k$ 时，上公式成立，即有

$$S(k) = \frac{\sin\left(\frac{k\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

因为

$$S(k+1) = S(k) + \sin((k+1)\varphi)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{k\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} + \sin((k+1)\varphi)$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{k\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin((k+1)\varphi)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{k\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{k\varphi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

利用公式

$$\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{k\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)$$

则有

$$S(k+1) = \frac{\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

② $$= \frac{\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{(k+2)\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}.$$

$n=k+1$ 情形成立!

注：将 $C(n)=\dfrac{\sin(\frac{n\varphi}{2})\cos(\frac{(n+1)\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$ 留作习题（作业题），习题课不讲。

证明：(1) $n=1$ 时，公式显然成立.

(2) $C(k+1)=C(k)+\cos((k+1)\varphi)$

$$=\frac{\sin(\frac{k\varphi}{2})\cos(\frac{(k+1)\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})}+\cos((k+1)\varphi)$$

$$=\frac{\sin(\frac{k\varphi}{2})\cos(\frac{(k+1)\varphi}{2})+\sin(\frac{\varphi}{2})\cos((k+1)\varphi)}{\sin(\frac{\varphi}{2})}$$

分子 $=\sin(\frac{k\varphi}{2})\cos(\frac{(k+1)\varphi}{2})-\cos(\frac{k\varphi}{2})\sin(\frac{(k+1)\varphi}{2})+\cos(\frac{k\varphi}{2})\sin(\frac{(k+1)\varphi}{2})$

$+\sin(\frac{\varphi}{2})\cos((k+1)\varphi)$

$$=-\sin(\tfrac{\varphi}{2})+\sin(\tfrac{\varphi}{2})\cos((k+1)\varphi)+\cos(\tfrac{k\varphi}{2})\sin(\tfrac{(k+1)\varphi}{2})$$

$$=\sin(\tfrac{\varphi}{2})(\cos((k+1)\varphi)-1)+\cos(\tfrac{k\varphi}{2})\sin(\tfrac{(k+1)\varphi}{2})$$

$$=-2\sin(\tfrac{\varphi}{2})\sin(\tfrac{(k+1)\varphi}{2})^2+\cos(\tfrac{k\varphi}{2})\sin(\tfrac{(k+1)\varphi}{2})$$

$$=\sin(\tfrac{(k+1)\varphi}{2})\left(\cos(\tfrac{k\varphi}{2})-2\sin(\tfrac{\varphi}{2})\sin(\tfrac{(k+1)\varphi}{2})\right)$$

$$=\sin\left(\tfrac{(k+1)\varphi}{2}\right)\left(\cos(\tfrac{(k+1)\varphi}{2})\cos(\tfrac{\varphi}{2})+\sin(\tfrac{\varphi}{2})\sin(\tfrac{(k+1)\varphi}{2})-2\sin(\tfrac{\varphi}{2})\sin(\tfrac{(k+1)\varphi}{2})\right)$$

$$=\sin\left(\frac{(k+1)\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{(k+2)\varphi}{2}\right).$$

§2. 单变元多项式.

$\mathbb{F}$ 数域，如 $\mathbb{Q}$，$\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$.

x 符号或变元，未定元

称表达式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \triangleq \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$

其中 $a_i\in\mathbb{F}$

为系数在 $\mathbb{F}$ 中关于 x 的多项式.

如果 $a_n \neq 0$，则称 n 为 f 的次数 $(\deg_x(f))$，a_n 为 f 的

首项系数 $(Lc_x(f))$

$\mathbb{F}[x]$：所有系数在 $\mathbb{F}$ 中关于 x 的多项式组成的集合.

"多项式与整数非常类似！"

基本运算：$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$

加法：$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i) x^i$

数乘：$c \cdot f(x) = \sum_{i=0}^{n} (c \cdot a_i) x^i \quad \forall c \in \mathbb{F}$.

乘法：$x^i \cdot x^j = x^{i+j} \qquad (a x^i)(b x^j) = ab x^{i+j}$

$$f \cdot g = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k$$

定理：$\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$.

$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$.

回顾：整数的带余除法

$m, n \in \mathbb{Z} \qquad m = q \cdot n + r \qquad q, r \in \mathbb{Z}$ $\boxed{r < n}$

$15 = 7 \cdot 2 + 1$

多项式的带余除法：

$f = 2x^3 + x^2 + x + 1$

$g = 3x^2 + 1$

$f = q \cdot g + r \qquad q, r \in \mathbb{F}[x]$ 且 $\boxed{\deg(r) < \deg(g)}$

$$f - \frac{2}{3}x \cdot g = 2x^3 + x^2 + x + 1 - \frac{2}{3}x(3x^2+1)$$
$$= 2x^3 + x^2 + x + 1 - 2x^3 - \frac{2}{3}x$$
$$= \underbrace{x^2 + \frac{1}{3}x + 1}_{\bar{f}}$$

$$\bar{f} - \frac{1}{3}g = x^2 + \frac{1}{3}x + 1 - \frac{1}{3}(3x^2+1)$$
$$= x^2 + \frac{1}{3}x + 1 - x^2 - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$
$$f = \underbrace{\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)}_{q} g + \underbrace{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}_{r}.$$

多项式的根:

称 $x_0 \in \mathbb{F}$ 为 $f(x)$ 的根 若 $f(x_0) = 0$.

定理. 一个次数为 n 的多项式至多有 n 个根.

证明: (利用归纳法)

(1) 当 $n=1$ 时, $f(x) = ax+b$ 则只有一个根 $x_0 = -\frac{b}{a}$.

(2) 假设命题对 $n \le k$ 成立. 下面考虑 $n = k+1$

若 $f(x)$ 有 $k+2$ 个不同的根, 记为

$$x_1, x_2, \cdots, x_{k+2}$$

令 $f = a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k + \cdots + a_0$

$g = a_{k+1}(x - x_1) \cdots (x - x_{k+1})$

则 $f-g=\underbrace{\lambda_k x^k+\cdots+\lambda_0}_{h}$ $\deg(h)\le k$.

由归纳假设，h 至多有 k 个根. 但是 $x_1,\cdots,x_{k+1}$ 为 h 的根 矛盾！ 所以命题对 $n=k+1$ 也成立. 证毕！

证法二. 设 f 为一个 n 次多项式. 若存在 $x_0\in\mathbb{F}$ 为 f 的根

考虑， $f=g(x-x_0)+r \quad r\in\mathbb{F}$.

先证明 $r=0$. 应用事实 $f(x_0)=0$，可得 $r(x_0)=0\Rightarrow r=0$

$\deg(g)=\deg(f)-1$. 由归纳假设.

则 g 至多有 $n-1$ 个根. 所以 f 至多有 n 个根.

§3. 牛顿二项式展开公式.

排列与组合:

有一个球筐里有 n 个球，分别标号为 $1,2,\cdots,n$. 另有 $k\ (\le n)$ 个互不相同的盒子，则从球筐里取出 k 个球放入这些盒子的放法有多少种？

$$n^{\underline{k}}=n(n-1)\cdots(n-k+1) \qquad n!\triangleq n^{\underline{n}}$$

从球筐里取出 k 个球放入另一个球筐的放法有多少种？

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

规定: $\binom{0}{0}=1$，$\binom{n}{k}=0\ \left(\begin{matrix}k<0\\ \text{或 } k>n\end{matrix}\right)$

基本性质: ① $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

② $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ （班长定理）

③ $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

④ $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$

⑤ $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$

⑥ $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} = \binom{n}{k-m}\binom{n-k+m}{m}$

$(m \le k \le n)$.

二项式公式：

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n$$

证明：(1) 当 $n=1$ 时，公式显然成立.

(2) 假设公式对所有 $\le n$ 的数成立，则

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b)$$
$$= a^{n+1} + a^n b + \cdots + \binom{n}{k+1}a^{n+2-k}b^{k-1} + \binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k$$
$$+ \binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + \cdots + ab^n + b^{n+1}$$
$$= a^{n+1} + \cdots + \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)a^{n+1-k}b^k$$
$$+ \cdots + b^{n+1}$$

由班长定理：$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

即得到公式对 $n+1$ 也成立，证毕！

推论：(1) 取 $a=b=1$，可得

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

(2) 取 $a=1$，$b=-1$ 可得

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0.$$

例4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=4^n$

证明：(母函数方法)

回顾：(在微积分中证明)

$$(x+y)^\alpha=x^\alpha+\binom{\alpha}{1}x^{\alpha-1}y+\cdots+\binom{\alpha}{i}x^{\alpha-i}y^i+\cdots$$

其中 $\displaystyle\binom{\alpha}{i}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)}{i!}$

由此可得公式：$\displaystyle\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-4)^k=\binom{2k}{k}$

则有 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-4x)^k=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$

$$\frac{1}{1-4x}=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4x}}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}x^k\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}\right)x^n$$

又因为 $\displaystyle\frac{1}{1-4x}=\sum_{n=0}^{\infty}4^nx^n$

对比两边系数可得：$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}=4^n.$

例5.（费马小定理）

若p为素数. 求证 n^p-n 对任意$n\in\mathbb{Z}$可以被p整除，即有

$$n^p \equiv n \mod p.$$

证明: (1) 当$n=1$时，显然成立 $(p\mid 0)$

(2) 假设命题对$n=k$时成立. 那么

$$(k+1)^p-(k+1) = k^p+\binom{p}{1}k^{p-1}+\cdots+\binom{p}{i}k^{i}+\cdots+1-(k+1)$$

$$= k^p-k+\binom{p}{1}k^{p-1}+\cdots+\binom{p}{i}k^{i}+\cdots+\binom{p}{p-1}k$$

由归纳假设, k^p-k被p整除. 又注意到

$$p \mid \binom{p}{i} \qquad i=1,2,\cdots,p-1$$

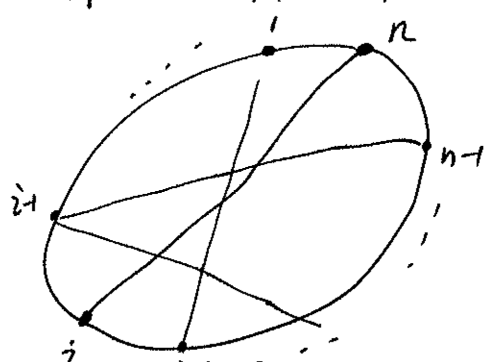
所以 $p \mid (k+1)^p-(k+1)$, 命题对$n=k+1$成立. 证毕!

例6. 给定圆周上任意n个点, 确定由$\binom{n}{2}$条弦划分的圆内区域数R_n. 此处假设任意三条弦在圆内不相交.

证明: $R_n = 1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}$

R_n: 1, 2, 4, 8, 16, 31, $\cdots$

假设R_{n-1}已知, 则要建立R_n, R_{n-1}之间的关系.



在(i,n)连线上与其它弦交点个数

正好对应区域增加数 +1

所以有如下递归公式:

$$R_n = R_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}\big((i-1)(n-i-1)+1\big).$$

由例1，可知

$$\sum_{i=1}^{n-1}\Big((i-1)(n-i-1)+1\Big)=\frac{1}{6}n^3-n^2+\frac{17}{6}n-2.$$

那么 $R_n=R_0+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{6}n^3-n^2+\frac{17}{6}n+(-2)\right)$

$$=1+\frac{1}{6}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{17}{6}\frac{n(n+1)}{2}-2n$$

$$=1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}.$$

注：求解递归关系：

$$S_n-S_{n-1}=a_n$$

$$\Longleftrightarrow\quad S_n=\sum_{i=1}^{n}a_i+c\qquad c\text{为待定常数（由}S_0\text{的值来定）}$$

基本性质：

① $\sum_{i=1}^{n}(a_i\pm b_i)=\sum_{i=1}^{n}a_i\pm\sum_{i=1}^{n}b_i$

② $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}b_j\right)=\sum_{k=1}^{m+n}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\Big((i-1)(n-i-1)+1\Big)$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(-i^2+ni+2-n\right)$$

$$=-\left(\sum_{i=1}^{n-1}i^2\right)+n\left(\sum_{i=1}^{n-1}i\right)+(2-n)(n-1)$$

$$=-\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)n}{2}+(2-n)(n-1)$$

$$=\frac{1}{6}n^3-n^2+\frac{17}{6}n-2.$$