第十五次作业

1. 设 F 是域, $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $A^2 = E$. 证明:

   (i) 如果 F 的特征不等于 2, 则 $\mathrm{rank}(A-E)+\mathrm{rank}(A+E) \le n$,

   (ii) 如果 F 的特征等于 2, 则 $\mathrm{rank}(A-E) \le n/2$.

2. 设域 $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{i} \mid i = 0,1,2\}$, $f(x) = x^2 + \bar{2}$, 和

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

   计算 $f(A)$. 确定 $f(A)$ 是否可逆. 当 $f(A)$ 可逆时, 计算 $f(A)^{-1}$. .

3. 多项式 $f(X) = X^5 + 3X^4 + X^3 + 4X^2 - 3X - 1$, $g(X) = X^2 + X + 1$ 可以看作环 $\mathbb{Q}[X]$ 中的多项式或者环 $\mathbb{Z}_5[X]$ 中的多项式. 用带余除法证明:

   (i) 在第一种情况下 $f(x)$ 不被 $g(x)$ 整除,

   (ii) 而在第二种情况下，$f(x)$ 可以被 $g(x)$ 整除.

4. 设数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} k & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix},$$

   其中 $k, c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, 求 A^{-1}.

第15次作业题解答：

1. 设 $A\in M_n(F)$ 且 $A^2=E$ 证明:

(i) 如果 $\mathrm{char}(F)\neq 2$，则 $\mathrm{rank}(A-E)+\mathrm{rank}(A+E)\leq n$

$$A^2=E \Rightarrow A^2-E=(A-E)(A+E)=0$$

Sylvester不等式: $A\in F^{m\times s}$ $B\in F^{s\times n}$

$$\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-s\leq \mathrm{rank}(AB)\leq \min\{\mathrm{rank}(A),\mathrm{rank}(B)\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(A^2-E)=0\geq \mathrm{rank}(A-E)+\mathrm{rank}(A+E)-n$$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(A-E)+\mathrm{rank}(A+E)\leq n$$

(ii) 如果 $\mathrm{char}(F)=2$，则有 $-E=E \Rightarrow A-E=A+E$

于是 $\mathrm{rank}(A-E)+\mathrm{rank}(A+E)=2\mathrm{rank}(A-E)\leq n$

$$\Rightarrow \mathrm{rank}(A-E)\leq \frac{n}{2}$$

2. 设 $\mathbb{Z}_3=\{\bar{i}\mid i=0,1,2\}$ $f(x)=x^2+\bar{2}$，和

$$A=\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{1}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix}$$

计算 $f(A)$. 确定 $f(A)$ 是否可逆，当 $f(A)$ 可逆时，计算 $f(A)^{-1}$.

答: $f(A)=A^2+\bar{2}E=\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{1}&\bar{0}\\ \bar{2}&\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{2}&\bar{0}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{2}\\ \bar{0}&\bar{0}&\bar{0}\\ \bar{2}&\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix}$$ 不可逆

3.

$$f(x)=x^5+3x^4+x^3+4x^2-3x-1$$

$$g(x)=x^2+x+1$$

(i) 在 $Q[x]$ 中，$g(x) \nmid f(x)$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3+2x^2-2x+4 \\
\hline
x^2+x+1 & x^5+3x^4+x^3+4x^2-3x-1 \\
 & x^5+x^4+x^3 \\
\hline
 & 2x^4+0+4x^2-3x-1 \\
 & 2x^4+2x^3+2x^2 \\
\hline
 & -2x^3+2x^2-3x-1 \\
 & -2x^3-2x^2-2x \\
\hline
 & 4x^2-x-1 \\
 & 4x^2+4x+4 \\
\hline
 & -5x-5
\end{array}$$

则有：$f(x)=(x^3+2x^2-2x+4)g(x)-5x-5$

在 $Z_5[x]$ 中，$\overline{-5x-5}=\overline{0}$ 因此 当将 f, g 看成 $Z_5[x]$ 中多项式时，$g(x) \mid f(x)$ 且有

$$f(x)=(x^3+\bar{2}x^2-\bar{2}x+\bar{4})\,g(x)$$

4、设数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} k & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}$$ 其中 $k, c \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$

求 A^{-1}

答：由 $\det(A)=k^n \neq 0$，A 是可逆的

$$A = kE + cH \qquad H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

H 为幂零矩阵，即 $H^n=0$

注意到如下公式：$(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})=1-x^n$

$$\frac{1}{k}A = E+\frac{c}{k}H = E-\left(-\frac{c}{k}H\right) \quad 令 B=-\frac{c}{k}H$$

$$B^n = \left(-\frac{c}{k}\right)^n \cdot H^n = 0$$

于是 $(E-B)(E+B+\cdots+B^{n-1}) = E-B^n = E$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{k}A\right)^{-1} = (E-B)^{-1} = E+B+\cdots+B^{n-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} \\ & 1 & r & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & r^2 \\ & 0 & & \ddots & r \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad r=-\frac{c}{k}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{k}\begin{pmatrix} 1 & r & r^2 & \cdots & r^{n-1} \\ & \ddots & & & r^2 \\ & & & & r \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$